

## Feuille 7. Fonctions de deux variables

**Exercice 1.** Etudier la continuité des fonctions suivantes de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$ .
2.  $f_2(x, y) = \frac{x^2}{y}$  si  $y \neq 0$ ,  $f(x, 0) = 0$ .
3.  $f_3(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

**Exercice 2.** Pour chacune des applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes,

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy, \quad f_2(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 y^2, \quad f_3(x, y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy,$$

$$f_4(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - (x + y)^4, \quad f_5(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2),$$

1. Calculer le gradient de  $f$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ .
3. Calculer la matrice hessienne de  $f$ .
4. Pour chacun des points critiques de  $f$ , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
5. Pour chacun des points critiques de  $f$ , dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de  $f$ .

**Exercice 3.** Soit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par,

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 - xy.$$

1. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation  $z = f(x, y)$  aux points  $(1, 1, f(1, 1))$ ,  $(1, 2, f(1, 2))$ ,  $(2, 1, f(2, 1))$ .
2. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau passant par  $(1, 1)$ , si elle existe.

**Exercice 4.** Etant donné le domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  et la fonction  $f$ , dessiner  $D$  et calculer l'intégrale double de  $f$  sur  $D$  dans les cas suivants.

1.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y, 0 < y < 1\}$ ,  $f_1(x, y) = x^2 + y$ .
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $f_2(x, y) = x \sin(xy)$ .
3.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ ,  $f_3(x, y) = x^2 \sin(xy)$ .
4.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$ ,  $f_4(x, y) = x(1 - 2x) \sin(xy)$ .
5.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ , où  $a, b > 0$ ,  $f_5(x, y) = x^3 + y^3$ .
6.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ,  $f_6(x, y) = \ln(1 + x + y)$ .