L2 MTH1314 2016-2017

Devoir Maison n ° 3
A rendre pour le lundi 5 Décembre

Le barème est donné à titre indicatif. La rédaction doit être personnelle et soignée.

Exercice 1. *(5 points)*

1. *(2 points)* Déterminer U et V deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ tels que
$$X^2U + (X-1)^3V = 1.$$
2. *(1 point)* Ecrire le développement de Taylor en 1 du polynôme U.
3. *(2 points)* Déduire des deux questions précédentes la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de
$$F = \frac{1}{X^2(X-1)^3}.$$

Exercice 2. *(10 points+2 points bonus)* On admet dans cet exercice que pour tout $n \geqslant 2$, le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$.

1. *(1 point)* Lister tous les éléments des groupes alternés $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.
2. *(2 points)* Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions. Montrer, en discutant suivant le nombre d'éléments communs à leurs supports, que l'on peut toujours écrire $\tau_1 \circ \tau_2$ comme un produit de 3-cycles (éventuellement d'un seul).
3. *(1 point)* En déduire que tout élément de $\mathcal{A}_n$ peut s'écrire comme un produit de 3-cycles.
4. *(2 points)* On suppose $n \geqslant 4$. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ de cardinal $\frac{n!}{4}$ et $\tau \in \mathcal{A}_n \setminus H$. Montrer que
$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n \\ & \sigma \mapsto \sigma \circ \tau \end{aligned}$$
est une bijection.
5. *(2 points)* Montrer que $\varphi(H) = \mathcal{A}_n \setminus H$ et en déduire $\varphi(\mathcal{A}_n \setminus H)$.
6. *(2 points)* En déduire que pour tout $\tau \in \mathcal{A}_n$, on a $\tau^2 \in H$.
7. *(Bonus ! 2 points)*Conclure qu'un tel sous-groupe H n'existe pas.

Exercice 3. *(5 points)* Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique (c'est-à-dire ${}^tA = -A$) et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note c_1, c_2, ..., c_{2n} les vecteurs colonnes de A et e le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. *(2 points)* Prouver que la fonction F définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \det(A + xJ)$, est une fonction paire.
2. *(2 points)* Prouver que $F(x) = \det(A) + x\sum_{i=1}^{2n} \det(c_1, \ldots, c_{i-1}, e, c_{i+1}, \ldots, c_{2n})$.
3. *(1 point)* En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(A + xJ) = \det(A)$.