

Feuille 7. Le déterminant

Exercice 1. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ par la formule $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$, puis par développement par rapport à une ligne ou colonne, enfin à l'aide d'opérations élémentaires.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $b = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Calculer $\det_b(e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det_b(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1)$.

Exercice 3. On dit qu'une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$. Montrer que si n est impair et A est antisymétrique alors son déterminant est nul. Le résultat est-il encore vrai si n est pair ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\det(B) = \det(A)$.

Exercice 6. On appelle matrice de permutation une matrice carrée M telle que : $M_{ij} \in \{0, 1\}$, il y ait un et un seul 1 par ligne, et il y ait également un et un seul 1 par colonne. Autrement dit, il existe une permutation $\sigma_0 \in S_n$ telle que $m_{ij} = \delta_{i, \sigma_0(j)}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Montrer qu'alors on a $\det M = \varepsilon(\sigma_0)$.

Exercice 7. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det(A + iB) = \det(A - iB)$.
2. On suppose que A et B commutent : $AB = BA$. Montrer alors $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 8. On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les tous les coefficients sont entiers.

1. Montrer par une formule du cours que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. On dit qu'une matrice A est dans $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ si les trois conditions suivantes sont remplies.
 - (a) La matrice A est à coefficients dans \mathbb{Z} : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
 - (b) La matrice A est inversible.
 - (c) Son inverse est aussi un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Montrer que si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A)$ vaut 1 ou -1 .

3. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que pour tout $k \in \{1, \dots, 2n+1\}$, $A + kB \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Soit F la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \det(A + xB)$. Montrer que F est une fonction constante sur \mathbb{R} et en déduire que $B = 0$.

Exercice 9. Vrai ou Faux

Soient v_1, v_2, v_3, v_4 4 vecteurs quelconques de \mathbb{R}^4 . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si $v_2 = -v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$.
2. Si $v_3 = -2v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = -2$.
3. $\det(v_1, v_3, v_4, v_2) = -\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
4. $\det(v_1, 2v_2, 3v_4, 4v_4) = 24\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
5. $\det(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) = 2\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
6. $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
7. $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
8. $\det(3v_1 + v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
9. $\det(2v_1 + v_3, v_2, v_3, 2v_4 - v_2) = 4\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Exercice 10. Vrai ou Faux

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un n -uplet de vecteurs de \mathbb{R}^n . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si on remplace l'un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres le déterminant est inchangé.
2. Si on soustrait au premier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est inchangé.
3. Si on soustrait le premier vecteur à chacun des autres, le déterminant est inchangé.
4. Si on multiplie chacun des vecteurs par 2, le déterminant est multiplié par 2^n .
5. Si on ajoute au dernier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est multiplié par 2.
6. Si on échange deux des vecteurs, le déterminant est changé en son opposé.

Exercice 11. Vrai ou Faux

Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$, $n \geq 2$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\det(A) = \det({}^t A)$.
2. $\det(2A) = 2\det(A)$.
3. $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.
4. $\det(A + {}^t A) = 2\det(A)$.
5. Si A est diagonale, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
6. Si A est triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
7. Si A est diagonale par blocs, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
8. Si l'une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.
9. Si on ajoute à la première ligne de A une combinaison linéaire des autres, le déterminant est inchangé.
10. Si on soustrait de la dernière ligne de A la somme de toutes les lignes, le déterminant est inchangé.