



Chapitre XI : La fonction inverse

I Définition

On rappelle que $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est l'ensemble des réels différents de 0.

Définition I.1

La **fonction inverse** f est la fonction qui à tout réel NON NUL associe son inverse :

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

II Représentation

Compléter le tableau suivant :

x		-4	-2	-1	-1/2		-1/5	0
$\frac{1}{x}$	-0,2					-4		

x	1/5		0,5	1	2	4	
$\frac{1}{x}$		4					0,2

A l'aide du tableau précédent, tracer la courbe représentative de la fonction inverse sur le graphique en annexe.

III Propriétés

Proposition III.1

La fonction inverse est

- négative sur $] -\infty; 0[$
- positive sur $]0; +\infty[$.

Son tableau de signes est donc

x	−∞		0	+∞
$\frac{1}{x}$				

**Proposition III.2**

La fonction inverse est

- décroissante sur $] - \infty; 0[$,
- décroissante sur $]0; +\infty[$.

Son tableau de variations est donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	+	+	+	
	↘		↘	

Démonstration. Soit $x \leq y < 0$. On constate que $xy > 0$. En conséquence :

$$\frac{x}{xy} \leq \frac{y}{xy} < \frac{0}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0.$$

On en déduit que la fonction inverse est décroissante sur $] - \infty; 0[$. De même pour $0 < x < y$, on a toujours $xy > 0$. Ainsi

$$\frac{0}{xy} < \frac{x}{xy} \leq \frac{y}{xy} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

A nouveau on en déduit que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$. □

IV Signe d'un quotient

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{-3x + 8}{5x - 20}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Les seuls points $x \in \mathbb{R}$ qui peuvent poser problème sont ceux pour lesquels le dénominateur s'annule (on ne divise jamais par 0!) :

$$\begin{aligned} 5x - 20 = 0 & \Leftrightarrow 5x = 20 \\ & \Leftrightarrow x = \frac{20}{5} = 4. \end{aligned}$$

Donc la fonction n'est pas définie en 4. Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

2. Dresser le tableau de signes de f .

De la même façon que pour le degré 2, on a d'une part

$$\begin{aligned} -3x + 8 \geq 0 & \Leftrightarrow -3x \geq -8 \\ & \Leftrightarrow x \leq \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Donc



x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$-3x + 8$		0	

D'autre part, on a aussi :

$$\begin{aligned}5x - 20 \geq 0 &\Leftrightarrow 5x \geq 20 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{20}{5} = 4.\end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$5x - 20$		0	

En réunissant ces deux tableaux, on en déduit que

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	4	$+\infty$
$-3x + 8$		0		
$5x - 20$			0	
$\frac{-3x+8}{5x-20}$		0	0	

Annexe

