Chapitre I : Logique et raisonnement

I Eléments de logique

I.1 Assertions et connecteurs logiques

Définition I.1

Une **assertion** ou une **proposition** est une phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité : une assertion est soit **vraie**, soit **fausse**.

Exemples 1 :

- L'assertion $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\right)$ est vraie.
- L'assertion (144 est le carré de 13) est fausse.
- L'assertion (3 divise 94716) est vraie.
- L'expression $\left((4-\sqrt{17})\times\frac{4\pi}{7i}\right)$ n'est pas une assertion.

Remarques 2 :

- Dans notre cadre on admet qu'une proposition est soit vraie soit fausse et ne peut être vraie et fausse simultanément, c'est ce que l'on appelle le principe du tiers exclu.
- Soit P la phrase suivante : (La phrase P est fausse). La phrase P n'est pas une assertion car ne peut être ni vraie ni fausse. C'est le paradoxe du menteur équivalent à la phrase (En énonçant la phrase présente, je mens.).
- ATTENTION : l'exemple précédent montre qu'il est important de distinguer les assertions mathématiques et les éléments de logique en général présentés dans ce cours de la logique et du langage courant dit *vernaculaire*. Par exemple nous allons voir que l'utilisation du *ou* possède une signification différente dans le langage courant (cf Remarques 4). Il est par conséquent très important de se référer à la logique mathématique du cours pour éviter tout contre-sens ou ambiguïté. La rigueur de la rédaction est un point primordial pour la bonne qualité d'un article scientifique ou d'une copie d'un étudiant ! Seulement, je vous rassure la logique mathématique rejoint dans la grande majorité des cas l'intuition.

Définition I.2

Soit P une assertion. **La négation** de P, notée $non\,(P)$ (ou encore $\bar{P}$ ou $\neg P$) est l'assertion qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

Table de vérité

P	$non\,(P)$
V	F
F	V

Exemple 3 : Nier les assertions suivantes :

1. P_1 : $(3-5i\in\mathbb{R})$
2. P_2 : (Un rectangle qui possède deux côtés consécutifs égaux est un carré.).
3. P_3 : $(\mathrm{e}\geqslant\pi)$.

Définition I.3

Soient P et Q deux assertions.

L'assertion P ET Q (notée aussi $P\wedge Q$) est l'assertion qui est vraie lorsque les assertions P et Q sont vraies simultanément et qui est fausse sinon.

P	Q	P ET Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition I.4

Soient P et Q deux assertions.

L'assertion P OU Q (notée aussi $P \wedge Q$) est l'assertion qui est vraie lorsque l'une de deux assertions P ou Q au moins est vraie et qui est fausse sinon.

P	Q	P OU Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarques 4 :

- Le ET et le OU peuvent avoir une signification légèrement différente dans le langage vernaculaire. Par exemple « Je prends un livre sur l'étagère et je le lis. » cache ici une dimension temporelle qui n'est pas présente dans le ET mathématique où les assertions doivent être vraies simultanément.
- ATTENTION : le OU n'est dans sa définition pas exclusif. Dans la phrase « Préfères-tu une villa en Italie ou un château en Bavière ? », le « ou » sous-entend que la personne ne doit choisir qu'une seule option. Le logicien lui permet d'avoir les deux ! Dans (l'aile OU la cuisse) il peut obtenir, l'aile sans la cuisse, la cuisse sans l'aile, l'aile et la cuisse.

Exemples 5 :

- Traduire la proposition P : ($\ln(2)$ est un réel entre $0,69$ et $0,7$.) à l'aide de deux assertions et du connecteur logique ET.
- Soit x un réel. Traduire l'assertion Q : $\left(x^2 \geqslant 3\right)$ à l'aide de deux assertions et du connecteur logique OU.

Proposition I.5 (Lois de Morgan)

Soient P et Q deux assertions.

- L'assertion $non\,(P$ ET $Q)$ est l'assertion $(non\,(P)$ OU $non\,(Q))$.
- L'assertion $non\,(P$ OU $Q)$ est l'assertion $(non\,(P)$ ET $non\,(Q))$.

Remarque 6 : Il est important de savoir appliquer ces règles automatiquement sans hésiter.

Exercice 7 : Ecrire les deux tables de vérité de $non\,(P$ ET $Q)$ et de $(non\,(P)$ OU $non\,(Q))$ et vérifier que le résultat est identique.

Exemple 8 : Soit ABC un triangle du plan.

1. A l'aide d'assertions sur les distances AB, BC et AC, écrire l'assertion (ABC est un triangle équilatéral.).
2. En déduire une assertion exprimant que ABC n'est pas équilatéral.
3. Faire de même pour écrire une assertion exprimant que ABC n'est pas isocèle.

Proposition I.6

Les connecteurs ET et OU sont

1. **commutatifs**. Soient P et Q deux assertions. L'assertion $(P$ ET $Q)$ s'écrit aussi $(Q$ ET $P)$ et l'assertion $(P$ OU $Q)$ s'écrit aussi $(Q$ OU $P)$
2. **associatifs**. Soient P, Q et R trois assertions.
   - L'assertion $([P$ ET $Q]$ ET $R)$ s'écrit aussi $(P$ ET $[Q$ ET $R])$.
   - L'assertion $([P$ OU $Q]$ OU $R)$ s'écrit aussi $(P$ OU $[Q$ OU $R])$.
3. **distributifs**. Soient P, Q et R trois assertions.
   - L'assertion $(P$ ET $[Q$ OU $R])$ s'écrit aussi $([P$ ET $Q]$ OU $[P$ ET $R])$.
   - L'assertion $(P$ OU $[Q$ ET $R])$ s'écrit aussi $([P$ OU $Q]$ ET $[P$ OU $R])$.

Exemple 9 : Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Ecrire l'assertion $((x-3)(y+2) \geqslant 0)$ à l'aide des assertions $(x \geqslant 3)$, $(y \geqslant -2)$, $(x \leqslant 3)$, $(y \leqslant -2)$ et de connecteurs logiques.
2. Ecrire la négation de l'assertion trouvée à la question 1.
3. Démontrer que l'assertion obtenue à la question 2 correspond bien à l'assertion $((x-3)(y+2) < 0)$.

I.2 Implication et équivalence

Définition I.7

Soient P et Q deux assertions. **L'implication** de Q par P, notée $P \Rightarrow Q$, est l'assertion (Q OU *non* (P)).

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemples 10 :

- L'implication (S'il pleut alors je n'irais pas jouer dehors.) est vraie

  $$\text{(s'il ne pleut pas)} \ \text{OU} \ (\text{(s'il pleut)} \ \text{ET} \ \text{(que je ne joue pas dehors)}) .$$

  Cette implication est fausse s'il pleut ET que je joue dehors.
- Soient a et b deux réels. L'implication $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ est vraie. En effet, par disjonction de cas :
  — Si l'assertion $(a = b)$ est fausse, c'est-à-dire si $a \neq b$, alors $(a^2 = b^2)$ peut être vraie ou fausse (on ne sait pas) mais de toutes façons, par définition, l'implication $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ est vraie.
  — Si l'assertion $(a = b)$ est vraie, alors naturellement $(a^2 = b^2)$ est aussi vraie et donc l'implication $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ est vraie.

  Dans tous les cas, on voit que l'implication $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ est vraie.

Remarques 11 :

- Puisqu'une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie dans le cas où P est fausse, il suffit pour la démontrer de vérifier que lorsque l'on a P alors on a Q en même temps. Cela signifie que la démonstration d'une implication correspond bien à ce que vous avez étudié précédemment.
- Il peut paraître étrange d'affirmer que $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie lorsque Q est fausse. Cependant l'argument suivant peut aider à comprendre cette notion contre-intuitive. Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est fausse il faut et il suffit de montrer que Q est fausse alors que P est vraie, autrement dit que l'assertion (P ET *non* (Q)) est vraie. L'assertion *non* $(P \Rightarrow Q)$ est donc (P ET *non* (Q)). En niant ces deux expressions de la même assertion on trouve que $P \Rightarrow Q$ est exactement (*non* (P) OU Q). En reprenant l'exemple ci-dessus, une personne affirmant (S'il pleut alors je n'irais pas jouer dehors.) ne ment pas s'il ne pleut pas et ce quelle que soit son action dans cette situation (jouant dehors ou non). Donc son affirmation est vraie et ne peut être remise en cause en cas de beau temps.
- D'après la définition de l'implication, une proposition fausse implique toutes les assertions possibles.
  Note historique : on raconte, qu'intrigué par ce résultat, un philosophe interpella Bertrand Russel de la façon suivante : « -Vous voulez dire que si $2 = 1$, alors vous êtes le Pape ? »
  « -Bien sûr, répondit Russel. En effet, le Pape et moi sommes deux personnes distinctes et deux égale un, donc le Pape et moi sommes la même personne. »

Définition I.8

Soient P et Q deux assertions et considérons l'implication $P \Rightarrow Q$.

- **La contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication *non* $(Q) \Rightarrow$ *non* (P).
- **La réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
- **L'équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ est l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ ET $(Q \Rightarrow P)$. C'est donc l'assertion qui est vraie lorsque l'implication $(P \Rightarrow Q)$ et sa réciproque $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies simultanément. On dit alors que P est équivalent à Q ou encore que P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.

Exercice 12 : Ecrire les tables de vérité de la contraposée, la réciproque et de l'équivalence.

Exemple 13 : On reprend l'implication $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer si la contraposée, la réciproque et l'équivalence associées sont vraies. Lorsque ce n'est pas le cas, déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel les assertions sont vraies.

Proposition I.9

Soient P, Q et R trois assertions.

- L'implication est **transitive** :
$$((P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$
- La contraposée est équivalente à l'implication :
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\,(Q) \Rightarrow non\,(P)).$$
- La négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est P ET $non\,(Q)$.
- Si P implique Q, il suffit que P soit vraie pour que Q le soit. On dit que P est **une condition suffisante** pour réaliser Q. Au contraire pour que P soit vraie il faut absolument que Q le soit. On dit que Q est **une condition nécessaire** pour réaliser Q.
- Si P est équivalente à Q, on dit que P est **une condition nécessaire et suffisante** pour réaliser Q.

Remarque 14 : Notez que la négation d'une implication n'est pas une implication. Il ne faut pas confondre la négation d'une implication, sa contraposée et sa réciproque.

Exemple 15 : Soit $x \geqslant 0$.

1. Démontrer l'implication suivante : $x^2 + x + 1 \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq \sqrt{x}$.
2. Démontrer que l'assertion $x + 1 = \sqrt{x}$ est toujours fausse.

Exemple 16 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que l'implication (f continue) $\Rightarrow$ (f dérivable) est fausse en général.

Exemple 17 : Soit $x \in [-2; +\infty[$.

1. Justifier que l'équivalence $x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 = x + 2$ est fausse pour certaines valeurs de x.
2. Modifier le terme de droite de l'équivalence pour obtenir une équivalence qui soit vraie.

I.3 Prédicats et quantificateurs

Définition I.10

On appelle **prédicat** une assertion $P(x)$ qui dépend d'un paramètre x (à valeurs dans un ensemble E considéré).

Exemples 18 :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: (l'entier n est pair.). Alors naturellement, on remarque que $P(2)$ est vraie tandis que $P(3)$ est fausse.
- Pour toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) dérivable sur $\mathbb{R}$, on considère l'assertion $Q(f) : f' + f = 0$. Déterminer une fonction f pour laquelle $Q(f)$ est vraie et une fonction f pour laquelle $Q(f)$ est fausse.
- Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note que l'assertion $R(x, y) : x^2 + y^2 \geqslant 0$ est toujours vraie. Donc l'assertion $\tilde{R}$: $\big($ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x^2 + y^2 \geqslant 0\big)$ est vraie.

Pour préciser des prédicats en assertions, on définit les quantificateurs suivants.

Définition I.11

- **Le quantificateur universel**, noté $\forall$, signifie « pour tout » : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 \geqslant 0$.
- **Le quantificateur existentiel**, noté $\exists$, signifie « il existe » : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 1 \geqslant 0$.

Remarques 19 :

- La notation $\exists$, signifie qu'il existe (au moins) un élément. Il se peut qu'il en existe un seul ou plusieurs (on ne sait pas).
- On trouve parfois le symbole $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ». L'ajout du point d'exclamation garantit l'unicité de l'élément rendant le prédicat vraie.

- ATTENTION : il est très important de n'utiliser les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ et $\Leftrightarrow$ uniquement dans des assertions mathématiques. Il est rigoureusement interdit de s'en servir comme abréviations au milieu d'une rédaction en français !
- Tout se dit All en anglais, en prenant la première lettre (A) et en la retournant, nous obtenons le symbole $\forall$. De même l'existence est traduit par Exists, en prenant la première lettre (E) et en la retournant, nous obtenons le symbole $\exists$.
- Il est possible de combiner les quantificateurs lorsque le prédicat dépend de plusieurs variables (voir l'exemple 20 ci-dessous).
- **IMPORTANT** : l'assertion $(\forall x \in E, P(x))$, avec E un ensemble et $P(x)$ un prédicat, ne dépend pas de la variable x ! Exemple : pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0)$ ne dépend pas de x et signifie que la fonction f est positive ou nul sur $\mathbb{R}$. L'assertion peut également s'écrire $(\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geqslant 0)$. La variable x peut être remplacée par une autre variable (par exemple t). Elle est alors appelée **variable muette**.

Exemples 20 :

- « La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ » s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$.
- « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante » se traduit par l'assertion $\exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$.
- « La fonction f est majorée » se traduit par l'assertion $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M$.

Remarques 21 :

- On peut intervertir deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels. Par exemple pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les deux assertions $(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) > 0)$ et $(\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) > 0)$ sont équivalentes. On peut en particulier écrire l'assertion de la façon suivante : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) > 0\right)$. Autre exemple, pour $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les deux assertions $(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0, \quad f(x) > \varepsilon)$ et $(\exists \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > \varepsilon)$ sont équivalentes. On peut à nouveau écrire l'assertion de la façon suivante : $\left(\exists (\varepsilon, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x) > \varepsilon\right)$.
- **ATTENTION** : en règle général il est absolument interdit d'intervertir un quantificateur universel avec un quantificateur existentiel sous peine de changer la signification de l'assertion ! Exemple : l'assertion $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad x^3 > M$ est vraie. Démonstration : soit $M \in \mathbb{R}$, et considérons le réel $x = \max(M+1, 1)$. On a $x \geqslant M+1 > M$. Or $x \geqslant 1 > 0$, donc $x^2 \times x > x^2 \times M \Leftrightarrow x^3 > x^2 \times M$. Or $x \geqslant 1$ donc $x^2 \geqslant 1$ donc $x^2 \times M \geqslant M$. D'où $x^3 > x^2 \times M \geqslant M$. Mais l'assertion $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R}, \quad x^3 > M$ est fausse. Démonstration : supposons qu'il existe un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall M \in \mathbb{R}, \quad x^3 > M$. Puisque l'assertion est vraie pour tout réel M, en prenant $M = x^3 + 1$, on obtient $x^3 > x^3 + 1$ donc $0 > 1$, ce qui est absurde.

Proposition I.12

Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

- La négation de l'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$ est $\exists x \in E,\ \textit{non}\,(P(x))$.
- La négation de l'assertion $\exists x \in E,\ P(x)$ est $\forall x \in E,\ \textit{non}\,(P(x))$.

Exemple 22 : En niant les assertions de l'exemple 20, on obtient :

- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$ qui signifie bien que la fonction s'annule en au moins un point.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$ qui signifie bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > M$ signifie que la fonction f n'est pas majorée.

Remarque 23 : Il est très important de savoir appliquer ses règles de négation, proprement, mécaniquement et rapidement.

II Méthodes de raisonnements

II.1 Pour montrer une assertion P

Par raisonnement direct : On part d'une assertion P_0 que l'on sait vraie et par une série d'implications directes $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P$ vraies on en déduit P.
Par l'absurde : On suppose que P est fausse et on en déduit un résultat absurde. On en déduit que P ne peut être fausse et est donc vraie.

Exemples 24 :

- Démontrons que le dernier chiffre de 2^{50} est 4. On a $2^5 = 32 = 3 \times 10 + 2$. Donc $2^{10} = \left(2^5\right)^2 = (3 \times 10 + 2)^2 = 3^2 \times 10^2 + 2 \times 3 \times 10 \times 2 + 2^2 = A \times 10 + 4$ où $A \in \mathbb{N}$. Donc $2^{50} = (A \times 10 + 4)^5 = B \times 10 + 4^5 = B \times 10 + 2^10$ où $B \in \mathbb{N}$. En utilisant à nouveau le fait que $2^{10} = A \times 10 + 4$, on obtient $2^{50} = B \times 10 + A \times 10 + 4$. Donc le dernier chiffre de 2^{50} est bien 4.
- (Euclide) Démontrons qu'il existe une infinité de nombre premiers. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notons-les $p_1, p_2, \dots, p_n$. Considérons l'entier $p = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$. Il est facile de voir que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ p > p_k$. Donc p est un entier supérieur à 1 et n'est pas un nombre premier. Donc il existe un nombre premier q qui divise p. Puisque que q est premier, il existe $n_0 \in [\![1, r[\![$ tel que $q = p_{n_0}$. L'entier p_{n_0} divise p et divise $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ donc il divise la différence : $p - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n = 1$. Donc p_{n_0} est un nombre premier divisant 1 ce qui est impossible. Donc il existe une infinité de nombre premiers.
- Démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel alors il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En particulier $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair. Si p est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k + 1$ et donc $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k + 2) + 1$. Donc $\left(p \text{ impair} \Rightarrow p^2 \text{ impair}\right)$. Donc en prenant la contraposée, on en déduit que $\left(p^2 \text{ pair}\right) \Rightarrow (p \text{ pair})$. Donc p est pair, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2l$ et donc $p^2 = 4l$. De la relation $p^2 = 2q^2$ on en déduit que $2l = q^2$. Donc q^2 est pair et donc q est pair. Ainsi p et q sont deux nombres pairs premiers entre eux, ce qui est impossible. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

II.2 Pour montrer un prédicat $P(x)$

Avec un quantificateur universel : Pour montrer $\forall x \in E,\ P(x)$:

1. Par une suite d'équivalences directes : on montre que l'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$ est équivalente à une assertion $\forall x \in E,\ Q(x)$ que l'on sait vraie. Cette méthode n'est valide que lorsque l'équivalence est facile et sans ambiguïté.
2. Lorsque l'assertion $\forall x \in E,\ P(x)$ est moins évidente, on **fixe** un élément $x \in E$ et on montre alors que le prédicat $P(x)$ est vrai.
3. Par disjonction des cas : on découpe E en deux sous-ensemble F et G tels que $F \cup G = E$ alors

$$(\forall x \in E,\ P(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad ((\forall x \in F,\ P(x)) \text{ ET } (\forall x \in G,\ P(x)))\,.$$

Exemple 25 : Montrons l'assertion suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 2. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$ et procédons par disjonction des cas.
Premier cas : n est pair alors 2 divise n et donc 2 divise $n(2n+1)(7n+1)$.
Second cas : n est impair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Donc $7n + 1 = 14k + 7 + 1 = 2(7k + 4)$ est divisible par 2 et donc 2 divise $n(2n+1)(7n+1)$.
Dans tous les cas 2 divise $n(2n+1)(7n+1)$.
Procéder de même pour démontrer l'assertion $\forall n \in \mathbb{N},\ n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3.
Avec un quantificateur existentiel : Pour montrer $\exists x \in E,\ P(x)$

1. On invoque un théorème abstrait assurant cette existence.
2. On exhibe concrètement au moins un élément $x \in E$ dont on sait qu'il vérifie $P(x)$.

Exemple 26 : Montrons l'assertion suivante : $\exists (a, b) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$ tel que $a^b \in \mathbb{Q}$. Considérons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et procédons par disjonction de cas.
Premier cas $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel. Alors, l'énoncé est vérifié avec $a = b = \sqrt{2}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel (voir Exemple 24).
Second cas $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel. Alors l'énoncé est vérifié avec $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ car $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.

II.3 Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$

Par raisonnement direct : On suppose P vraie et on montre que Q l'est aussi.
Par contraposée : On montre $non\,(Q) \Rightarrow P$.
Par l'absurde : On suppose P ET $non\,(Q)$ et l'on montre que l'on obtient alors un résultat absurde.

Exemple 27 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer l'implication suivante :

$$(\forall\, \varepsilon > 0, \quad x < \varepsilon) \Rightarrow x \leqslant 0.$$

II.4 Pour montrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$

Par raisonnement direct : On démontre une série d'équivalences $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$.
Par double implication : On montre que $P \Rightarrow Q$ et que $Q \Rightarrow P$.

Exemple 28 : Démontrer l'équivalence suivante :

$$(f \text{ est une fonction paire et impaire}) \Leftrightarrow (f \text{ est la fonction nulle}).$$

II.5 Le raisonnement par Analyse-Synthèse

On recherche un ensemble de solutions à un problème donné (E). Pour ce faire on procède en deux temps.
Analyse/Conditions nécessaires. On fixe une solution de l'équation (qui peut être un réel, une fonction, ou autre). On détermine le maximum de caractéristiques que peut avoir cette solution afin de réduire le nombre de candidats solutionnant le problème (E).
Synthèse/Conditions suffisantes. On vérifie que les candidats obtenus à l'étape précédente sont tous bien solutions du problème (E).

Exemples 29 :

- Déterminer toute les solutions de l'équation $x = \sqrt{3-2x}$.
- Montrer l'assertion suivante :

$$\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists (g,h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2 \text{ tel que } g \text{ est paire, } h \text{ est impaire et } f = g + h.$$

II.6 Le raisonnement par récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer la propriété suivante : $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ P(n))$, où $P(n)$ est un prédicat.
La récurrence simple :

- **Initialisation.** On montre que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier $n \geqslant n_0$, quelconque et on suppose que $P(n)$ est vraie. On montre alors que $P(n+1)$ est vraie. Dans cette étape on montre donc que $\forall n \geqslant n_0,\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$.
- **Conclusion.** La propriété est vraie au rang n_0 et est héréditaire. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ P(n)$ est vraie.

La récurrence double :

- **Initialisation.** On montre que $P(n_0)$ ET $P(n_0+1)$ sont vraies.
- **Hérédité.** On fixe un entier $n \geqslant n_0$, quelconque et on suppose que $P(n)$ ET $P(n+1)$ sont vraies. On montre alors que $P(n+2)$ est vraie.
- **Conclusion.** On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ P(n)$ est vraie.

La récurrence forte :

- **Initialisation.** On montre que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier $n \geqslant n_0$, quelconque et on suppose que $\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, la propriété $P(k)$ est vraie. On montre alors que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ P(n)$ est vraie.

Exemples 30 :

- Démontrer l'assertion suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 4,\ 2^n > n^2$.
- On considère la suite de Fubonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Démontrer que

$$\forall n \geqslant 0, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

- Démontrer que tout en entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.

Une mathématicienne vient d'accoucher. Sa mère impatiente lui demande au téléphone :
« -C'est une fille ou un garçon ?
-Oui. »