Chapitre XII : Ensembles et Applications

I Ensembles

Introduction
La construction des mathématiques repose sur des axiomes ou postulats, en nombre restreint, que l'on admet pour ensuite développer une théorie cohérente. Dans la formulation moderne la plus classique, les mathématiques sont construites à partir de la théorie des ensembles et de l'axiomatisation ZFC (Ernest Zermelo et Abraham Fraenkel sont deux mathématiciens et C désigne un axiome appelé axiome du choix). Dans ce cadre, les ensembles sont des notions primaires que l'on ne définit pas.
On postule donc

- la notion d'ensemble (*une collection d'objet*)
- la notion d'appartenance (*être dedans ou ne pas y être*)
- la notion d'ensemble vide $\emptyset$ (*l'ensemble qui ne contient aucun élément*).

Remarque 1 : On peut définir un ensemble de deux façons.

- En extension : on liste l'ensemble de ses éléments en les mettant entre accolades. Exemple : l'ensemble des entiers pairs :
$$\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}.$$
- En compréhension : soient E un ensemble et P un prédicat sur E. On définit alors un ensemble en considérant tous les éléments $x \in E$ pour lesquels $P(x)$ est vraie :
$$\{\, x \in E \mid P(x) \text{ est vraie } \}.$$
Exemple : l'ensemble des entiers pairs est donné par
$$\{\, x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est pair. } \}.$$
Autre exemple : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ passant par $(0;0)$:
$$\{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}.$$

Je vous laisse deviner quelle définition est formellement plus rigoureuse.

I.1 Inclusion

Définition I.1

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est **inclus** dans B si et seulement si tout élément de A est un élément de B, on note alors $A \subseteq B$ ou encore $A \subset B$. Autrement dit,
$$A \subset B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in A, \quad x \in B.$$

Remarque 2 : On rappelle que $A \subset B$ et $A \subseteq B$ ont exactement la même signification. Pour noter que A est strictement inclus dans B c'est-à-dire

1. A est inclus dans B
2. il existe $b \in B$ tel que $b \notin A$.

alors on écrit $A \subsetneq B$.

Définition I.2

Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont égaux si et seulement si A est inclus dans B et B est inclus dans A :
$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subset B \quad \text{ET} \quad B \subset A.$$

Exemple 3 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$. On pose $A = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}^*,\ y = f(x) \,\}$. Montrer que $A = \mathbb{R}^*$.

Proposition I.3

La relation d'inclusion est :

1. réflexive : $A \subset A$.
2. transitive : $(A \subset B \text{ ET } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.
3. antisymétrique : $(A \subset B \text{ ET } B \subset A) \Rightarrow A = B$.

Définition I.4

Soient A et E deux ensembles.

- Si $A \subset E$, on dit aussi que A est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E.
- **L'ensemble des parties de** E, l'ensemble de tous les sous-ensembles de E, est noté $\mathscr{P}(E)$.

Exemple 4 :

1. Pour tout ensemble E, on a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
2. Si $E = \{0, 1, 2\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.
3. Lorsque $E = \{a\}$ est un **singleton** alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
4. Si $E = [0, 1]$, bien que $\mathscr{P}(E)$ existe, il impossible de le décrire simplement.

I.2 Intersection

Définition I.5

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle **intersection** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ET à B, noté $A \cap B$. Autrement dit,

$$A \cap B = \{\, x \in E \mid x \in A \text{ ET } x \in B \,\}.$$

Exemple 5 : Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose alors

$$A = \{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x) \,\}$$
$$B = \left\{\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b \,\right\}.$$

Déterminer $A \cap B$.

Proposition I.6

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. L'intersection de deux ensembles est :

1. Commutative : $A \cap B = B \cap A$.
2. Associative : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. Idempotente : $A \cap A = A$.
4. L'ensemble vide est absorbant : on a $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Définition I.7

Soit E un ensemble. Deux parties A et B de E sont dites **disjointes** si $A \cap B = \emptyset$.

I.3 Réunion

Définition I.8

Soient E un ensemble et A et B deux parties E. On appelle **réunion** ou **union** de A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A OU à B, noté $A \cup B$. Autrement dit,

$$A \cup B = \{\, x \in E \mid x \in A \ \text{ OU } \ x \in B \,\}.$$

Exemple 6 : On note $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$A = \{ f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0;1],\ f(x) > 0 \}$$
$$B = \{ f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0;1],\ f(x) < 0 \}$$
$$C = \{ f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0;1],\ f(x) \neq 0 \}.$$

Démontrer que $A \cup B = C$.

Proposition I.9

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensemble de E. La réunion de deux ensembles est :

1. Commutative : $A \cup B = B \cup A$.
2. Associative : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
3. Idempotente : $A \cup A = A$.
4. L'ensemble vide est neutre pour l'union : $A \cup \emptyset = A$.

I.4 Complémentaire et différence de deux ensembles

Définition I.10

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, noté $C_E(A)$. Autrement dit,

$$C_E(A) = \{ x \in E \mid x \notin A \}.$$

L'ensemble $C_E(A)$ est également noté $E \setminus A$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E, simplement $\bar{A}$.

Proposition I.11

Soit E un ensemble et A une partie de E, alors $C_E(C_E(A)) = A$ i.e. $E \setminus (E \setminus A) = A$ ou encore $\overline{(\bar{A})} = A$.

Exemple 7 : Si $E = \mathbb{N}$ et $A = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Alors $C_E(A) = 2\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

Proposition I.12

Soient E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E. On a les propriétés suivantes.

1. Si $A \subset B$ alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Loi de Morgan :

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B) \qquad \text{et} \qquad C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

Définition I.13

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On appelle **différence** de A par B l'ensemble des éléments de A qui n'appartienne pas à B, noté $A \setminus B$. Autrement dit,

$$A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A \ \text{ET} \ x \notin B \} = A \cap C_E(B)$$

Remarque 8 : Attention, il ne s'agit pas du complémentaire sauf si $A \subset B$ alors $A \setminus B = C_A(B)$.

Proposition I.14

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a

$$A \setminus B = C_A(A \cap B) = C_{A \cup B}(B).$$

I.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition I.15

- Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$ l'ensemble des couples d'éléments où la première coordonnée appartient à E et la seconde à F. Autrement dit,

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E \text{ ET } y \in F \} .$$

- *(Généralisation)* Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles. On appelle **produit cartésien** des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble défini par

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \in E_i \} .$$

  On appelle n**-uplet** tout élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Remarque 9 :

- Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_i = E$ alors on note $E \times E \times \cdots \times E = E^n$.
- Attention un n-uplet est toujours ordonné. Par exemple les couples $(1, 3)$ et $(3, 1)$ sont distincts (pensez aux coordonnées d'un point de l'espace) tandis que les ensembles $\{1, 3\}$ et $\{3, 1\}$ sont égaux.

Exemple 10 : Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ou même $\mathbb{R}^n$ sont des produits cartésiens de l'ensemble $\mathbb{R}$.

II Applications

II.1 Définition

Définition II.1

Soit E et F deux ensembles. Une application $f : E \to F$ de E dans F met tout élément x de E en relation avec un unique élément y de F, noté $y = f(x)$.

- On dit que E est l'ensemble de départ.
- On dit que F est l'ensemble d'arrivée.
- On dit que y est **l'image** de x par f.
- On dit que x est **un antécédent** de y par f.

Rigoureusement, pour définir une application, on considère Γ un sous-ensemble de $E \times F$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y, y') \in E \times F \times F, \qquad \left. \begin{array}{l} (x, y) \in \Gamma \\ (x, y') \in \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow y = y'.$$

La fonction définie à partir de Γ associe pour tout couple de Γ, la première coordonnée à la seconde. En d'autres termes, on commence par définir le graphe de f avant de définir f. Ici nous faisons l'inverse.

Définition II.2

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E dans F. **Le graphe de** f est le sous-ensemble de $E \times F$ défini par

$$\mathscr{G}(f) = \{ (x, y) \in E \times F \mid y = f(x) \} = \{ (x, f(x)) \mid x \in E \} .$$

Remarque 11 : Rigoureusement le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ n'est qu'une représentation dans le plan.

Définition II.3

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

II.2 Applications particulières

Définition II.4

Soit E un ensemble. On appelle **application identité** de E, l'application définie par

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_E : E &\to E\\ x &\mapsto x.\end{aligned}$$

Définition II.5

Soient E un ensemble et A un sous ensemble de E. On appelle **fonction indicatrice de** A l'application définie sur E par

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A : E &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases}1 \text{ si } x \in A\\ 0 \text{ si } x \notin A.\end{cases}\end{aligned}$$

Proposition II.6

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a

1. $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$
2. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
4. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
5. $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

II.3 Composition, restriction

Définition II.7

Soient E, F et G trois ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux applications. L'application composée de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G définie par

$$\begin{aligned}g \circ f : E &\to G\\ x &\mapsto g\left(f(x)\right).\end{aligned}$$

Remarque 12 :

- Si $f \in \mathscr{F}(E,F)$ alors $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.
- La composition n'est possible que si l'ensemble d'arrivée de f est inclus dans l'ensemble de départ de g

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Proposition II.8

La composition est associative : soient E, F, G et H des ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$, $h \in \mathscr{F}(G,H)$ alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Définition II.9

Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$. Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(A,F)$.

1. On appelle **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$ l'application de A dans F définie par :

$$\begin{aligned}f_{|A} : A &\to F\\ x &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

2. On appelle prolongement de l'application g toute application $h \in \mathscr{F}(E,F)$ telle que $g = h_{|A}$.

II.4 Image directe, image réciproque

On commence par rappeler la définition d'un ensemble image et de l'image réciproque.

Définition II.10

Soient E, F deux ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$ et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

- On appelle **image directe** de A par f le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \,\} = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}.$$

- On appelle **image réciproque** de B par f le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\}.$$

Remarque 13 :

- On rappelle que la notation $f^{-1}(B)$ n'implique pas que f est bijective. La définition de l'image réciproque est valable pour toute application, bijective ou non.
- Lorsque $A = E$, on note $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ l'ensemble de toutes les images de f.
- Si f est bijective alors $f^{-1}(B)$ est l'image directe de B par f^{-1} et $f(A)$ est l'image réciproque de A par f^{-1}.

Proposition II.11

Soient E, F deux ensembles, A, B deux parties de F et f une application de E dans F. On a les propriétés suivantes.

1. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(C_F(B)) = C_E(f^{-1}(B))$.

Démonstration.

1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$ telles que $A \subseteq B$. Soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition, $f(x) \in A$. Or $A \subseteq B$. Donc $f(x) \in B$, i.e. $x \in f^{-1}(B)$. On a donc démontré que tout élément de $f^{-1}(A)$ est un élément de $f^{-1}(B)$ et donc $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Conclusion $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ OU } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ OU } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

   Par conséquent, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. On procède de même que dans le point précédent. Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

   Par conséquent, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. Soit $F \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $f^{-1}(C_F(B)) = C_E(f^{-1}(B))$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C_F(B)) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in C_F(B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \notin B \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in C_E\left(f^{-1}(B)\right). \end{aligned}$$

   Conclusion $f^{-1}(C_F(B)) = C_E(f^{-1}(B))$.

$\square$

Proposition II.12

Soient E, F deux ensembles, A, B deux parties de F et f une application de E dans F. On a les propriétés suivantes.

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. On ne peut rien dire concernant le complémentaire.

Démonstration.

1. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ telles que $A \subseteq B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. On a alors par définition qu'il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subseteq B$. Donc $x \in B$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(B)$. Donc tout élément de $f(A)$ est un élément de $f(B)$. Donc $f(A) \subseteq f(B)$. Conclusion, $f(A) \subset f(B)$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in E$. On a

$$\begin{array}{llll} y \in f(A \cup B) & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) & \overset{(!)}{\Leftrightarrow} & (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ & & \Leftrightarrow & y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ & & \Leftrightarrow & y \in f(A) \cup f(B). \end{array}$$

   Conclusion $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   Attention ! ! ! Ce raisonnement est faux si l'on remplace l'union par l'intersection ! En effet le sens réciproque de (!) est faux pour l'intersection et le connecteur ET . C'est subtil mais il faut comprendre que s'il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$ et s'il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$, comme x_1 n'est pas forcément égal à x_2, il est possible que $x_1 \in A \setminus B$ et que $x_2 \in B \setminus A$. Alors rien ne nous permet de dire qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Donc y est l'image d'un élément de A (l'élément x) et y est l'image d'un élément de B (le même, l'élément x). Par conséquent, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. Finalement, on a montré que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

□

Remarque 14 :

- Tout se passe bien avec f^{-1} et tout est bon avec l'union.
- Ce n'est pas le cas avec l'image directe de l'intersection ou l'on n'a pas toujours égalité.
  Si $f : x \mapsto x^2$, vérifiez que l'inclusion est stricte pour $A = \mathbb{R}_+$ et $B = \mathbb{R}_-$.

Proposition II.13

Soient E, F deux ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$ et $f : E \to F$. On a les propriétés suivantes.

1. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
2. $A \subset f^{-1}(f(A))$

Démonstration.

1. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in f^{-1}(B)$, par conséquent, $f(x) \in B$. Or $y = f(x)$. Donc $y \in B$. Nous avons donc bien montré que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Posons $y = f(x)$ et $B = f(A)$. On a x qui est un antécédent de $y \in B$. Donc par définition, $x \in f^{-1}(B)$ i.e. $x \in f^{-1}(f(A))$. Par conséquent $A \subset f^{-1}(f(A))$.

□

Remarque 15 : En général on a pas $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ou $f^{-1}(f(A)) = A$.
Exemple : si $f : x \mapsto x^2$ et $B = \mathbb{R}$, alors $f\left(f^{-1}(\mathbb{R})\right) = \mathbb{R}_+$ et si $A = \mathbb{R}_+$, alors $f^{-1}(f(\mathbb{R}_+)) = \mathbb{R}$.

II.5 Injection, surjection et bijection

On rappelle les définitions suivantes.

Définition II.14

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

- On dit que f est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E :
$$\forall (x, x') \in E^2, \qquad (f(x) = f(x')) \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$
- On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$
- On dit que f est bijective si tout élément de F admet exactement un antécédent par f dans E :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$
  On note alors $f^{-1} : F \to E$ l'application qui a tout élément de F associe son unique antécédent dans E par f.

Remarque 16 : Si f est bijective, l'application f^{-1} est aussi une bijection mais de F dans E.

Proposition II.15

1. La composée de deux applications injectives est injective.
2. La composée de deux applications surjectives est surjective.
3. La composée de deux applications bijectives est bijective.

Proposition II.16

Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. L'application f est bijective.
2. Il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Remarque 17 : Attention si l'on a juste $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ ou juste $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on ne peut pas conclure. Exemple : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$. Alors $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$ et pourtant f n'est pas injective et g n'est pas surjective.

Proposition II.17

Soient E, F deux ensembles, $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, E)$.

1. Si $f \circ g$ injective alors g est injective.
2. Si $f \circ g$ surjective alors f est surjective.

Proposition II.18

Soient $f \in \mathscr{F}(E, F)$ et $g \in \mathscr{F}(F, G)$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est bijective et
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Remarque 18 : Notez la ressemblance avec les matrices, ce n'est pas une coïncidence...

III Relations d'équivalence

Définition III.1

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une propriété portant sur les couples (x, y) d'éléments de E. Lorsque qu'un $(x, y) \in E^2$ vérifie la propriété, on dit que x et y sont en relation et on note $x\mathcal{R}y$.

Exemple 19 :

- Dans $\mathbb{R}$, l'égalité $=$ est une relation binaire. De même, $\neq$ est une relation binaire.
- Soit E un ensemble. L'inclusion est une relation binaire dans $\mathcal{P}(E)$.
- Dans $\mathbb{R}$, $<$ est une relation binaire.

Définition III.2

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur une ensemble E.

- On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive** si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $[(x\mathcal{R}y) \text{ ET } (y\mathcal{R}z)] \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $[(x\mathcal{R}y) \text{ ET } (y\mathcal{R}x)] \Rightarrow x = y$.

Exemple 20 :

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation $=$ est réflexive, symétrique et transitive.
2. Dans $\mathscr{P}(E)$, la relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
3. Dans $\mathbb{R}$ la relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
4. Dans $\mathbb{R}$, la relation $\neq$ n'est pas réflexive, ni transitive. Elle est symétrique.
5. Dans $\mathbb{R}$, la relation $<$ n'est pas réflexive. Elle est transitive.

Définition III.3

On appelle **relation d'équivalence** sur un ensemble E, toute relation binaire qui est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 21 :

- La relation $=$ est toujours une relation d'équivalence.
- Le parallélisme sur un ensemble de droites est une relation d'équivalence.
- Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On définit la relation $\mathcal{R}$ pour tout $(x, y) \in E$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
- Soit $r \in \mathbb{Z}^*$. La relation $\mathcal{R}$ définie pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ par $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow r|m - n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Définition III.4

Soient E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence de x pour la relation $\mathcal{R}$, le sous ensemble de E noté $Cl(x)$ et définie par

$$Cl(x) = \{ y \in E \mid x\mathcal{R}y \} .$$

Exemple 22 :

- Soit E un ensemble et $x \in E$. Pour la relation $=$, on a $Cl(x) = \{x\}$.
- Soit $f : E \to F$ et $x \in E$. Pour la relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, on a

  $$Cl(x) = \{ y \in E \mid f(y) = f(x) \} .$$

  Il s'agit donc de l'ensemble des antécédents de $f(x)$. Il y a donc une classe d'équivalence pour chaque valeur prise par la fonction f.

- Pour la relation définie pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, par $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow 2|m-n$, on a pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$m\mathcal{R}n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad m-n=2k \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad m=n+2k.$$

Alors, il n'y a que deux classes d'équivalence : celle des entiers pairs et celle des entiers impairs.

Proposition III.5

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et soit $(x,y) \in E^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $x\mathcal{R}y$.
2. $Cl(x) = Cl(y)$.
3. $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$.

Démonstration.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Soient $(x,y) \in E^2$ tel que $x\mathcal{R}$. Montrons que $Cl(x) = Cl(y)$ et commençons par montrer que $Cl(x) \subseteq Cl(y)$. Soit $z \in Cl(x)$ par définition $z\mathcal{R}x$. Or $x\mathcal{R}y$ donc par transitivité, $z\mathcal{R}y$. Donc $z \in Cl(y)$. De cette façon, $Cl(x) \subseteq Cl(y)$. Par symétrie des hypothèses, on montre de même que $Cl(y) \subseteq Cl(x)$ et par conséquent $Cl(x) = Cl(y)$.
- (2) $\Rightarrow$ (3). Si $Cl(x) = Cl(y)$, alors on a $x \in Cl(x) = Cl(x) \cap Cl(y)$. L'ensemble $Cl(x) \cap Cl(y)$ possède donc un élément et est donc non vide.
- (3) $\Rightarrow$ (1). Si $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$, alors il existe $z \in E$ tel que $z \in Cl(x) \cap Cl(y)$. En particulier, $z \in Cl(x)$. Donc $z\mathcal{R}x$. Puis de même, $z \in Cl(y)$ implique que $z\mathcal{R}y$. Donc par transitivité, $x\mathcal{R}z\mathcal{R}y$ ce qui démontre le premier point.

□

Remarque 23 :

- Il suffit donc que l'intersection de deux classes d'équivalence soit non vide pour que ces deux classes soit en fait égales.
- Tout élément d'une classe d'équivalence la détermine entièrement.

Proposition III.6

L'ensemble des classes d'équivalence distinctes forment une partition de E, c'est-à-dire un ensemble de parties disjointes deux à deux de E dont l'union globale forme E tout entier.