Chapitre XVIII : Espaces Vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I Dimension d'un espace vectoriel

I.1 Base extraite, base incomplète

Définition I.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On dit que E est un espace vectoriel **de dimension finie** si et seulement s'il existe une famille *finie* de vecteurs de E qui est génératrice dans E. Autrement dit E est de dimension finie s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ tels que
$$E = \text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right).$$
- Sinon, on dit que E est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple 1 :

- Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
- $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels de dimension infinie.

Remarque 2 : Puisque qu'une base est une famille finie d'éléments et qu'elle est génératrice, tout espace vectoriel ayant une base est de dimension finie. Autrement dit tout espace vectoriel de dimension infinie n'admet pas de base.

Théorème I.2 (Théorème de la base extraite)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. De toute famille génératrice $\mathscr{G}$ finie on peut extraire une sous-famille $\mathscr{F}$ qui soit une base de E.

Démonstration. Soit $\mathscr{G}$ une famille finie de vecteurs de E, génératrice de E. On note $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et par hypothèse on a $E = \text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)$. On considère alors l'algorithme suivant :

1. Si la famille $\mathscr{G}$ est libre alors on retourne $\mathscr{G}$.
2. Si la famille $\mathscr{G}$ est liée, alors l'un des vecteurs de $\mathscr{G}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs :
$$\exists i \in \{1, \ldots, n\},\ \exists\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n\right), \quad u_i = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \lambda_j\, u_j.$$
On enlève alors ce vecteur de $\mathscr{G}$ et on pose $\mathscr{G}' = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$. La nouvelle famille $\mathscr{G}'$ est aussi génératrice (cf le point 6 de la proposition III.3 du chapitre XVII). On réitère alors l'algorithme à la famille $\mathscr{G}'$.

L'algorithme se termine toujours après un nombre fini d'étapes car à chaque itération on enlève un vecteur de $\mathscr{G}$ qui n'en contient que n. Donc au plus, l'itération est répétée $n-1$-fois et l'on obtient alors la famille ne contenant qu'un seul vecteur (u). On a vu qu'à chaque étape la famille considérée est toujours génératrice donc (u) est génératrice et donc $E = \text{Vect}(u)$. Or $E \neq \{0\}$ par hypothèse donc nécessairement u est non nul et (u) est donc libre. Donc l'algorithme s'achève au plus à la $n-1$-ième étape.
Enfin la famille retournée est bien génératrice (on a vu que toutes les familles considérées sont à chaque étape génératrices) et libre (par définition de l'algorithme que ne retourne la famille que lorsque celle-ci est libre). Donc la famille retournée est une base de E.

$\square$

Théorème I.3 (Existence d'une base en dimension finie)

Tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

Démonstration. C'est un corollaire du théorème de la base extraite. Si E est de dimension finie, il existe $\mathscr{G}$ une famille finie de E génératrice de E. On peut alors en extraire une base de E.

□

Théorème I.4 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)$, $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. On peut compléter $\mathscr{F}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ pour obtenir une base de E.

Démonstration. On effectue l'algorithme suivant :

1. Si la famille $\mathscr{F}$ est génératrice alors on retourne $\mathscr{F}$ et l'algorithme s'arrête.
2. Si la famille $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice on lui ajoute g_1, et l'on considère $\mathscr{F}' = (u_1, \dots, u_p, g_1)$ et $\mathscr{G}' = (g_2, \dots, g_n)$.
   2.1 Si $\mathscr{F}'$ est une famille libre alors on réitère l'algorithme sur les familles $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$.
   2.2 Si $\mathscr{F}'$ est liée alors on réitère l'algorithme sur les familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}'$.

A chaque itération, on ôte un vecteur de $\mathscr{G}$ (ou $\mathscr{G}'$) qui n'en contient que n donc on ne peut effectuer au plus que n itérations. L'important est de vérifier que la famille $\mathscr{F}$ complétée sera génératrice avant que l'on ait puisé tous les vecteurs de $\mathscr{G}$. Notez que par construction, la famille $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{F}'$ à laquelle on applique l'algorithme est toujours libre. Après une itération la nouvelle famille $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{F}'$ que l'on considère est dans le premier cas $\mathscr{F}' = (u_1, \dots, u_p, g_1)$ dans un second cas $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$. Démontrons que dans tous les cas, la famille retournée engendre l'espace $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p, g_1)$.

- Dans le cas 2.1 puisque l'on considère $\mathscr{F}' = (u_1, \dots, u_p, g_1)$, le résultat est immédiat.
- Dans le cas 2.2, montrons que $g_1 \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$. Puisque $\mathscr{F}'$ est liée, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que
$$\lambda_1\, u_1 + \cdots + \lambda_p\, u_p + \mu g_1 = 0$$
Supposons $\mu = 0$, alors $\lambda_1\, u_1 + \cdots + \lambda_p\, u_p = 0$. Comme $\mathscr{F}$ est libre, on en déduit que tous les $\lambda_i = 0$ ce qui contredit le fait que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu) \neq (0, \dots, 0)$. Par conséquent, on a $\mu \neq 0$ et donc
$$g_1 = -\frac{\lambda_1}{\mu} u_1 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\mu} u_p.$$
i.e. $g_1 \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ et donc $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p, g_1) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$.

Ainsi après après k itérations si l'algorithme ne s'est pas encore terminé, la famille complétée engendrera $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_k)$. Et notamment si $k = n$ elle engendrera $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_p, g_1, \dots, g_n) = E$ car la famille $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_n)$ est génératrice. Par conséquent l'algorithme se termine au plus à la n-ième itération.
Dans tous les cas, nous aurons complétée une famille de façon à ce qu'elle reste à chaque itération libre et à la fin de l'algorithme elle sera de plus génératrice et sera donc bien une base.

□

Proposition I.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

- Toute famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée.
- Toute famille de p vecteurs avec $p < n$ n'est pas génératrice de E.

Démonstration. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- Si $p > n$. La famille $\mathscr{B}$ est une base de E donc est notamment génératrice : $E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$. Donc pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $u_i \in E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$ et donc il existe $(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n}) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, e_j$$
En d'autres termes,
$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_{1,1}\, e_1 + \cdots + \lambda_{1,n}\, e_n = u_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p,1}\, e_1 + \cdots + \lambda_{p,n}\, e_n = u_p \end{cases}$$

Posons $A = (\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Puisque $p > n$ nécessairement $\mathrm{rg}(A) \leqslant n < p$. Donc la réduite de A est donnée par

$$R = (r_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où les $*$ représentent des coefficients égaux à 0 ou à 1. Il faut surtout noter que pour $i = p$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$, on a $r_{p,j} = 0$ (la dernière ligne au moins est nulle). Ainsi en effectuant les mêmes opérations élémentaires que sur la matrice A pour obtenir sa réduite R au système (S), on aura dans le second membre des combinaisons linéaires des u_i, notées v_i qui vaudront pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $r_{i,1}e_1 + \cdots + r_{i,n}e_n = v_i$. Notamment $v_p = 0$. Nous avons donc une combinaison linéaire de u_i qui vaut 0. Or les coefficients de cette combinaison linéaire ne sont pas tous nuls (car ils sont obtenus par des opérations élémentaires sur les u_i) et donc la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.

- Si $p < n$. Supposons que $(u_1, \dots, u_p)$ soit génératrice de E. Alors d'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base de E. Notons $\mathscr{B}'$ cette base et p' son nombre d'éléments. Cette base contient au plus p éléments donc $p' \leqslant p < n$. Donc $\mathscr{B}$ est une famille qui contient strictement plus d'éléments qu'une base de E. Donc par le point précédent, on en déduit que $\mathscr{B}$ est une famille liée ce qui est contradictoire avec le fait que $\mathscr{B}$ soit aussi une base. Donc $(u_1, \dots, u_p)$ n'est pas une famille génératrice de E.

$\square$

Corollaire I.6

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie possèdent le même nombre d'éléments.

I.2 Dimension d'un espace et conséquence sur les familles

Définition I.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nul, on appelle **dimension** de E le nombre d'éléments $n \in \mathbb{N}^*$ que possède chacune des bases de E. On note alors $\dim(E) = n$.
Par convention, $\dim(\{0\}) = 0$.

Exemple 3 : A connaitre !

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
- Pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.

Proposition I.8

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute famille libre de E possède au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.
- Toute base de E possède exactement n éléments.

Théorème I.9

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1. La famille $\mathscr{F}$ est génératrice.
2. La famille $\mathscr{F}$ est libre.
3. La famille $\mathscr{F}$ possède n éléments.

Alors la famille $\mathscr{F}$ est une base de E.

Remarque 4 : Puisque toutes les bases ont le même nombre d'éléments qui vaut la dimension de E, si $\mathscr{B}$ est une base les trois assertions énoncées sont vraies.

Démonstration.

- Les points 1 et 2 impliquent par définition que $\mathscr{F}$ est une base.
- Supposons les points 1 et 3. Procédons par l'absurde et supposons que $\mathscr{F}$ n'est pas une base. Puisqu'elle est déjà génératrice, cela suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas libre. Donc l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres vecteurs. En l'ôtant, on obtient $\mathscr{F}'$ une sous-famille de $\mathscr{F}$ qui est toujours génératrice et qui contient $n-1$ éléments. Par le théorème de la base extraite, on peut construire une sous-famille de $\mathscr{F}'$, appelons-la $\mathscr{B}$ qui soit une base de E. Puisque $\mathscr{B}$ est une sous-famille de E elle contient au plus $n-1$ éléments. Donc $\mathscr{B}$ est une base de E qui possède strictement moins que n éléments ce qui est absurde. Donc $\mathscr{F}$ est une base de E.
- Supposons les points 2 et 3. On procède de même et on suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas une base de E et donc qu'elle n'est pas une famille génératrice de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{F}$ en une sur-famille $\mathscr{B}$, une base de E, qui possédera strictement plus d'élément que $\mathscr{F}$ (sinon $\mathscr{B} = \mathscr{F}$ serait une base ce qui est une contradiction avec nos hypothèses). Donc $\mathscr{B}$ est une base de E qui possède strictement plus que n éléments ce qui est impossible. Ainsi $\mathscr{F}$ est bien une base de E.

□

Exemple 5 :

1. On considère les polynômes $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$, $P_1 = X(X-2)(X-3)$, $P_2 = X(X-1)(X-3)$ et $P_3 = X(X-1)(X-2)$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que la famille $((1,2,3,4), (-1,0,1,0))$ est libre et la compléter en une base.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $((1,2,3), (1,0,1), (2,1,3), (-1,4,0), (1,1,1))$ est génératrice et en extraire une base.

II Sous-espaces vectoriels en dimension finie

II.1 Dimension de sous-espaces vectoriels

Proposition II.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. F est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
2. $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
3. $\dim(F) = \dim(E) \quad \Rightarrow \quad F = E$.

Démonstration.

1. Si $F = \{0_E\}$ alors $\dim(F) = 0 \leqslant \dim(E)$. Sinon, on pose
$$\aleph = \{\text{Card}(\mathscr{L}) \mid \mathscr{L} \text{ est une famille libre de } F\},$$
où Card $(\mathscr{L})$ désigne le cardinal de $\mathscr{L}$ i.e. le nombre d'éléments de $\mathscr{L}$. L'ensemble $\aleph$ est
   - un sous-ensemble de $\mathbb{N}$,
   - non vide : puisque $F \neq \{0_E\}$, il existe $u \in F$ tel que $u \neq 0_E$. Donc $\mathscr{L} = (u)$ est une famille libre de F et donc $1 = \text{Card}(\mathscr{L}) \in \aleph$.

- majoré : toute famille libre de F est une famille libre de E et donc possède au plus $n = \dim(E)$. Donc tout élément de $\aleph$ est inférieur ou égal à n.

Par conséquent, $\aleph$ admet un maximum notons-le m :

$$m = \max(\aleph) = \max\{\,\text{Card}\ (\mathscr{L}) \mid \mathscr{L} \text{ est une famille libre de } F\,\}.$$

Par définition un maximum est toujours atteint, il existe donc $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ une famille libre de F telle que $m = \text{Card}\ (\mathscr{L})$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de F. Soit $x \in F$. La famille $\mathscr{B}' = \{x\} \cup \mathscr{B}$ possède $m+1$ éléments et n'est donc pas libre par définition de m. Il existe donc $(\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que

$$\mu x + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m = 0.$$

Si $\mu = 0$ alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ (car $\mathscr{B}$ est une famille libre) ce qui contredit que $(\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$. Donc $\mu \neq 0$ et par conséquent,

$$x = -\frac{\lambda_1}{\mu} e_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\mu} e_n \in \text{Vect}(\mathscr{B}).$$

On a donc montré que $F \subseteq \text{Vect}(\mathscr{B})$ et puisque $\mathscr{B}$ est une famille d'éléments de F, on en déduit que $F = \text{Vect}(\mathscr{B})$. En d'autres termes, la famille $\mathscr{B}$ est une base de F qui est donc bien de dimension finie (et même de dimension m).

2. Soit $\mathscr{B}_F$ une base de F. La famille $\mathscr{B}_F$ est une famille libre de F et donc de E. D'après le théorème de la base incomplète, $\mathscr{B}_F$ peut-être complétée en une base de E, notée $\mathscr{B}_E$. Puisque $\mathscr{B}_E$ contient $\mathscr{B}_F$, on a

$$\dim(F) = \text{Card}\ (\mathscr{B}_F) \leqslant \text{Card}\ (\mathscr{B}_E) = \dim(E).$$

3. Si $\dim(F) = \dim(E) = n$. Soit $\mathscr{B}_F$ une base de F. La famille $\mathscr{B}_F$ possède n éléments et est une famille libre de F et donc de E. Donc d'après le théorème I.9, on en déduit que $\mathscr{B}_F$ est aussi une base de E. Par conséquent,

$$F = \text{Vect}(\mathscr{B}_F) = E.$$

□

Proposition II.2

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F \subseteq G$ alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.

Proposition II.3

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1. $F \subseteq G$
2. $G \subseteq F$
3. $\dim(F) = \dim(G)$

Alors $F = G$.

Remarque 6 : Attention ces résultats sont faux en dimension infinie. $F = \{\,P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\,\}$ est de dimension infinie tout comme $E = \mathbb{K}[X]$ et pourtant $F \neq E$.

II.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition II.4

Soient E un espace vectoriel, $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $(u_1, \ldots, u_p)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs :

$$\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)).$$

Remarque 7 :

- On a toujours $\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant \dim(E)$. L'ensemble $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, donc par la proposition II.1, on en déduit bien que $\text{rg}(u_1, \ldots, u_p) \leqslant \dim(E)$.

- On a toujours $\mathrm{rg}\,(u_1,\dots,u_p) \leqslant p$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(u_1,\dots,u_p)$ et on a alors $\mathrm{rg}\,(u_1,\dots,u_p) = \dim\,(F)$. La famille $(u_1,\dots,u_p)$ étant génératrice de F, on sait qu'elle contient au moins $\dim(F)$ vecteurs (cf proposition I.8) et donc $\mathrm{rg}\,(u_1,\dots,u_p) \leqslant p$.

Proposition II.5

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors

1. La famille $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = n$.
2. La famille $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = p$.
3. La famille $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = n = p$.

Démonstration. On pose $F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$.

1. Si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \dim\,(F) = n$, alors d'après la proposition II.1, on en déduit que $E = F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ et donc $\mathscr{F}$ est bien une famille génératrice. Réciproquement, si $\mathscr{F}$ est génératrice dans E alors $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})) = \dim\,(E) = n$.
2. Si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \dim\,(F) = p$, alors $\mathscr{F}$ est une famille de F, génératrice dans F, possédant $p = \dim(F)$ vecteurs. Donc d'après le théorème I.9, $\mathscr{F}$ est une base de F et est donc libre. Réciproquement si $\mathscr{F}$ est libre. Puisque par définition, $\mathscr{F}$ est toujours génératrice dans $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ alors $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ et donc $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \dim\,(\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{F}) = p$.
3. Par ce qui précède, $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \dim\,(F) = p = n$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre et génératrice dans E si et seulement si $\mathscr{F}$ forme une base de E.

□

Exemple 8 :

1. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$ le rang de (P_1,P_2,P_3,P_4) où
$$P_1 = -X^3+3X^2+X+2, \qquad P_2 = 5X^3+X^2+2X+4,$$
$$P_3 = 2X^3+5X^2+X+3, \qquad P_4 = 8X^3+3X^2+2X+5.$$
2. Calculer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de $((1,1,0),(0,1,1),(2,1,-1))$.

II.3 Dimension de la somme

Théorème II.6 (Formule de Grassman)

Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On a
$$\dim\,(F+G) = \dim\,(F) + \dim\,(G) - \dim\,(F\cap G)\,.$$

Démonstration. On pose $p = \dim\,(F)$, $q = \dim\,(G)$ et $r = \dim\,(F\cap G)$. On fixe $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_r)$ une base de $F\cap G$. Puisque $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de F, $\mathscr{B}$ est une famille libre de F que l'on peut compléter en une base de F, notée $\mathscr{B}_F = (e_1,\dots,e_r,f_{r+1},\dots,f_p)$. De même on peut compléter $\mathscr{B}$ en une base $\mathscr{B}_G = (e_1,\dots,e_r,g_{r+1},\dots,g_q)$ de G. On pose $\mathscr{B}' = (e_1,\dots,e_r,f_{r+1},\dots,f_p,g_{r+1},\dots,g_q)$. Montrons que $\mathscr{B}'$ est une base de $F+G$.

- Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice de $F+G$. Soit $x \in F+G$. Il existe $y \in F$ et $z \in G$ tel que $x = y+z$. Puisque $\mathscr{B}_F$ est une base de F, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$y = \lambda_1\,e_1 + \dots + \lambda_r\,e_r + \lambda_{r+1}\,f_{r+1} + \dots + \lambda_p\,f_p.$$
De même, $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc il existe $(\mu_1,\dots,\mu_q) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$z = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_r e_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_p g_q.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} & x = (\lambda_1+\mu_1)\,e_1 + \dots + (\lambda_r+\mu_r)\,e_r + \lambda_{r+1}\,f_{r+1} + \dots + \lambda_p\,f_p + \mu_{r+1}g_{r+1} + \dots + \mu_p g_q \\ \Rightarrow\quad & x \in \mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_r,f_{r+1},\dots,f_p,g_{r+1},\dots,g_q) = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}')\,. \end{aligned}$$
Donc $F+G \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}')$. Or il est clair que $\mathscr{B}'$ est une famille de $F+G$ donc $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice de $F+G$.

- Montrons que $\mathscr{B}'$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_{r+1}, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q-r}$ tel que

$$\begin{aligned} & \lambda_1\, e_1 + \cdots + \lambda_r\, e_r + \lambda_{r+1}\, f_{r+1} + \cdots + \lambda_p\, f_p + \mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{\lambda_1\, e_1 + \cdots + \lambda_r\, e_r + \lambda_{r+1}\, f_{r+1} + \cdots + \lambda_p\, f_p}_{\in F} = \underbrace{-\left(\mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q\right)}_{\in G} \quad (1) \end{aligned}$$

Par conséquent, $u = -\left(\mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q\right) \in F \cap G$. Or $\mathscr{B}$ est une base de $F \cap G$ et donc il existe $(\nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$\begin{aligned} & u = -\left(\mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_p g_q\right) = \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_r e_r \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_r e_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \cdots + \mu_q g_q = 0. \end{aligned}$$

Or $\mathscr{B}_G$ est une base de G, donc $\nu_1 = \cdots = \nu_r = \mu_{r+1} = \dots \mu_q = 0$. En particulier $u = 0$ et donc par (1),

$$\lambda_1\, e_1 + \cdots + \lambda_r\, e_r + \lambda_{r+1}\, f_{r+1} + \cdots + \lambda_p\, f_p = 0.$$

Or $\mathscr{B}_F$ est une base de F, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. On a donc bien montré que tous les coefficients initiaux étaient nuls et donc $\mathscr{B}'$ est bien libre.

Donc $\mathscr{B}'$ est une base de $F+G$ et possède $r+(p-r)+(q-r) = p+q-r$ éléments et donc $\dim(F+G) = p+q-r = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

□

Proposition II.7

Soient E un espace vectoriel et F et G deux espaces de dimension finie de E.

1. Si F et G sont en somme directe alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
2. Si F et G sont supplémentaires dans E alors, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Proposition II.8

Soient E un espace vectoriel et F et G deux espaces de dimension finie de E. Si deux des assertions suivantes sont vraies :

1. $F \cap G = \{0\}$
2. $F + G = E$
3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

alors F et G sont supplémentaires dans E.

Remarque 9 : Si F et G sont supplémentaires, alors en concaténant une base de F et de G, on obtient une base de E et réciproquement, si en concaténant une base de F et une base de G on obtient une base de E alors F et G sont supplémentaires.

Proposition II.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E.

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$. Si $n = 0$ le résultat est direct. Supposons $n \in \mathbb{N}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Puisque E est de dimension finie, on sait que F est aussi de dimension finie, notons $p = \dim(F)$ sa dimension. Puisque F est de dimension finie, F admet une base. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. La famille $\mathscr{B}_F$ est libre dans F et donc dans E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ des vecteurs de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. On pose $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ et on note que $\mathscr{B}_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre (car sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre) et engendre G. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G et donc $\dim(G) = n - p$. De plus puisque $\mathscr{B}$ est génératrice dans E, il est facile de voir que $F + G = E$. En utilisant la proposition précédente, on peut conclure que G est un supplémentaire de F.

□