Chapitre XIX : Applications linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I Généralités

I.1 Définition

Définition I.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F. On dit que f est **une application linéaire** si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Remarque 1 :

1. Une application linéaire est une fonction qui « préserve/est compatible » avec les structures d'espaces vectoriels de E et F.
2. En particulier pour tout (x, y), $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Définition I.2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Si $F = E$, une application linéaire de E dans E, est appelée **un endomorphisme** de E.
- On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $F = \mathbb{K}$, une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée **une forme linéaire**.

Proposition I.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ on a
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$
3. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors $f_{|G}$ est une application linéaire de G dans F : $f_{|G} \in \mathscr{L}(G, F)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. En prenant $y = x$, $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, comme f est linéaire :
$$f(0_E) = f(x - x) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(x) - f(x) = 0_F.$$
2. Exercice : procédez par récurrence sur n.
3. Il suffit de dérouler les définitions.

$\square$

Exemple 2 :

1. L'application nulle $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array} \right.$ est linéaire.
2. L'application identité $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme.

3. Plus généralement, toute homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, $h_\lambda : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{cases}$ est un endomorphisme de E.
4. La translation de vecteur $a \in E \setminus \{0_E\}$ $\tau_a : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x+a \end{cases}$ n'est pas linéaire.
5. La dérivation sur les fonctions $D : \begin{cases} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & D(f) = f' \end{cases}$ est linéaire (on peut aussi parler de la dérivation comme un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}))$ par exemple).
6. La dérivation sur les polynômes $D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & D(P) = P' \end{cases}$ est un endomorphisme (on peut aussi parler de la dérivation comme un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n-1}[X])$).
7. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'application $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ax+by \end{cases}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
8. L'évaluation en un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi_{x_0} : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x_0) \end{cases}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (on peut aussi parler de l'évaluation des polynômes dans $\mathbb{K}$).
9. L'intégrale $I : \begin{cases} \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$.
10. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-z) \end{cases}$ est linéaire.

I.2 L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$

- On peut sommer deux applications linéaires qui ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F. Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)$, on pose

$$f+g : \begin{cases} E & \rightarrow F \\ x & \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x). \end{cases}$$

- On peut également multiplier une application linéaire par un scalaire : pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda f : \begin{cases} E & \rightarrow F \\ x & \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

- Enfin on peut composer deux applications linéaires lorsque l'espace d'arrivée de la première coïncide avec l'espace de départ de la seconde : pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathscr{L}(F,G)$

$$g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow G \\ x & \mapsto (g\circ f)(x) = g(f(x)). \end{cases}$$

  En particulier si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme, on peut composer f par f : $f \circ f$ et recommencer. On note alors

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Proposition I.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.

Démonstration. EXO ! Démontrez que cela constitue un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$. □

Proposition I.5

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{L}(E)$.

Démonstration.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda x + \mu y) = g(f(\lambda x + \mu y)) &= g(\lambda f(x) + \mu f(y)) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\ &= \lambda g \circ f(x) + \mu g \circ f(y). \end{aligned}$$

   Donc $g \circ f$ est bien linéaire.
2. C'est une conséquence du point précédent et d'une récurrence.

$\square$

Proposition I.6

Soient E un espace vectoriel, f et g deux **endomorphismes** de E, $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$. On suppose que f et g **commutent** i.e. $f \circ g = g \circ f$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$,
2. *(formule de Leibniz)* $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$,
3. *(formule de Bernoulli)* si $n \geqslant 1$, alors $f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$.

I.3 Noyau et Image

Définition I.7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau** de f l'ensemble des antécédents de 0_F par f, i.e. l'image réciproque de $\{0_F\}$, noté Ker (f) :

$$\text{Ker }(f) = f^{-1}(0_F) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

- On appelle **image** de f l'ensemble des images de E par f, i.e. l'image directe de E par f, noté $\text{Im}(f)$:

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \in F \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Remarque 3 : On en parle toujours d'image directe pour n'importe quelle application mais on ne parle de noyau QUE pour des applications LINEAIRES (c'est l'usage).

Proposition I.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors

1. le noyau Ker (f) est un sous-espace vectoriel de E
2. l'image $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

1. Montrons que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Par définition Ker $(f) \subseteq E$.
   - On a vu dans la proposition I.3 que puisque f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$. Donc on a bien $0_E \in$ Ker (f).

- Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(x,y)\in \text{Ker }(f)^2$. Posons $z=\lambda x+\mu y$. Alors

$$\begin{aligned} f(z)=f(\lambda x+\mu y) &= \lambda f(x)+\mu f(y) && \text{car } f \text{ est linéaire}\\ &= \lambda\times 0_F+\mu 0_F && \text{car } x\in \text{Ker }(f) \text{ et } y\in\text{Ker }(f)\\ &= 0_F. \end{aligned}$$

  Par conséquent $z=\lambda x+\mu y\in\text{Ker }(f)$ qui est donc un ensemble stable par combinaison linéaire.

Conclusion Ker (f) est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrons que $\text{Im}(f)$ est un sous-ensemble vectoriel de F.
   - Par définition, $\text{Im}(f)\subseteq F$.
   - On sait toujours (proposition I.3) que $f(0_E)=0_F$. Donc le vecteur 0_F admet au moins un antécédent (0_E par exemple) par f. Donc $0_F\in\text{Im}(f)$.
   - Soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$ et $(y_1,y_2)\in\text{Im}(f)^2$. Montrons que $y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ appartient à $\text{Im}(f)$. Puisque $y_1\in\text{Im}(f)$, il existe $x_1\in E$ tel que $f(x_1)=y_1$. De même, $y_2\in\text{Im}(f)$ donc il existe $x_2\in E$ tel que $f(x_2)=y_2$. Par suite,

$$y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)=f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

     En posant $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$, on observe que $y=f(x)$ et donc on a trouvé un antécédent pour y. Ainsi $y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2\in\text{Im}(f)$ et l'ensemble $\text{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire.

   Conclusion, l'ensemble $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

□

Exemple 4 : Dans chacun des cas suivants déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire.

1. $f:\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F\\ x & \mapsto & 0_F\end{array}\right.$
2. $f=\text{Id}_E$
3. $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x+y\end{array}\right.$
4. $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto & (x+y-z,x-y+z,y-z)\end{array}\right.$

Proposition I.9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f\in\mathscr{L}(E,F)$.

1. Si A est un sous-espace vectoriel de E alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Si B est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 5 : La proposition I.8 est un cas particulier de ce résultat.

Démonstration.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrons

$$f(A)=\{y\in F \mid \exists x\in A,\ y=f(x)\}$$

   est un sous-espace vectoriel de F.
   - Par définition $f(A)\subseteq F$.
   - Puisque A est un sous-espace vectoriel de E, on sait que $0_E\in A$. Donc $f(0_E)\in f(A)$. Or $f(0_E)=0_F$ donc $0_F\in f(A)$.
   - Soient $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$ et $(y_1,y_2)\in f(A)^2$. Posons $y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$. Puisque y_1 et y_2 sont dans $f(A)$, il existe $x_1\in A$ et $x_2\in A$ tels que $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$. Donc

$$y=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)=f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

     Posons $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$. Puisque A est un sous-espace vectoriel et que x_1 et x_2 sont dans A, on en déduit que $x\in A$. Or $y=f(x)$. On a donc construit pour y un antécédent de y qui soit dans A. Donc $y\in f(A)$. Ainsi $f(A)$ est stable par combinaison linéaire.

   Conclusion, $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2. Soit B un sous-espace vectoriel de F. Montrons que
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
   - Par définition $f^{-1}(B) \subseteq E$.
   - Si $x = 0_E$. Comme f est linéaire, $f(0_E) = 0F$. Or B est un sous-espace vectoriel de F. Donc $0_f \in B$. Donc $f(0_E) \in B$ et donc $0_E \in f^{-1}(B)$.
   - Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(x_1, x_2) \in f^{-1}(B)$. Montrons que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$ i.e. $f(x) \in B$. On a
   $$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
   Par définition, x_1 et x_2 sont deux éléments de $f^{-1}(B)$ i.e. $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont deux éléments de B. Or B est un sous-espace vectoriel donc
   $$\lambda_1 \underbrace{f(x_1)}_{\in B} + \lambda_2 \underbrace{f(x_2)}_{\in B} \in B.$$
   Donc $f(x) \in B$ autrement dit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x \in f^{-1}(B)$. Donc $f^{-1}(B)$ est stable par combinaison linéaire.

   Conclusion $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de B.

□

II Injection, surjection, isomorphisme

II.1 Définition et caractérisation

Proposition II.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
1. L'application f est injective si et seulement si $\text{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
2. L'application f est surjective si et seulement si $\text{Im}\,(f) = F$.

Démonstration.
1. Supposons que f soit injective. Montrons que $\text{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. On sait que $\{0_E\} \subseteq \text{Ker}\,(f)$ car f est linéaire ou encore que $\text{Ker}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \text{Ker}\,(f)$. Alors,
$$f(x) = 0_F = f(0_E) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$
Or f est injective donc $x = 0_E$. D'où $\text{Ker}\,(f) \subseteq \{0_E\}$. Conclusion $\text{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
Supposons que $\text{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. Montrons que f est injective. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, par linéarité de f,
$$0_E = f(x) - f(y) = f(x - y).$$
Par conséquent, $x - y \in \text{Ker}\,(f) = \{0_E\}$. Donc $x - y = 0_E$ i.e. $x = y$. On en déduit donc bien que f est injective.
2. Une application f est surjective si et seulement si tout élément de F admet (au moins) un antécédent, autrement dit si et seulement si tout élément de F est dans $\text{Im}\,(f)$. Or on a toujours $\text{Im}\,(f) \subseteq F$. Donc f est surjective si et seulement si $\text{Im}\,(f) = F$.

□

Remarque 6 : Le premier point est une propriété utile des applications linéaires alors que le second point de la proposition est général à toute application.

Remarque 7 :
1. La fonction $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\dim(\text{Ker}\,(f)) = 0$.
2. Si F est de dimension finie. La fonction $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $\dim(\text{Im}\,(f)) = \dim(F)$.

Exemple 8 : Dans les applications suivantes, déterminer si f est injective et/ou surjective.

1. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+z) \end{array} \right.$
3. Pour $a \in \mathbb{R}$, $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array} \right.$

Définition II.2

- Une application linéaire bijective est appelé un **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** si et seulement s'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ un isomorphisme de E dans F.

Exemple 9 :

1. Montrer que E est toujours isomorphe à lui même.
2. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Proposition II.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** de E. Autrement dit :

1. $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition : pour tout $(f,g) \in \mathrm{GL}(E)^2$, $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ admet un inverse dans $\mathrm{GL}(E)$: pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

Démonstration.

1. Soit $(f,g) \in \mathrm{GL}(E)^2$. Puisque l'ensemble de départ de f est l'ensemble d'arrivée de g, $f \circ g$ est bien définie. De plus on a déjà vu que la composition de deux applications linéaires reste une application linéaire. Donc $f \circ g$ est un endomorphisme de E. Puisque f et g sont bijectives, on en déduit également (propriété générale sur les fonctions bijectives) que $f \circ g$ est bijective. Conclusion $f \circ g \in \mathrm{GL}(E)$.
2. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Puisque $f : E \to E$ est bijective, on en déduit que $f^{-1} : E \to E$ existe et est bijective. Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$. On pose $x' = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(y)$ et donc $x = f(x')$ et $y = f(y')$. Ainsi
$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x + \mu y) = f^{-1}(\lambda f(x') + \mu f(y')) &= f^{-1}(f(\lambda x' + \mu y')) && \text{car } f \text{ est linéaire.} \\ &= \lambda x' + \mu y' \\ &= \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y). \end{aligned}$$
Par conséquent f^{-1} est linéaire. D'où $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

□

II.2 Famille de vecteurs et applications linéaires

Proposition II.4

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. Alors
$$f(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$
En particulier si $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice dans E alors,
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

Démonstration. Montrons que $f(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)) \subseteq \mathrm{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n))$. Soit $y \in f(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n))$. Par définition, il existe $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ tel que $y = f(x)$. Par suite, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$

Ainsi,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f\left(x_k\right) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire.}$$

D'où $y \in \mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$ et par conséquent, on a bien démontré que

$$f\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right) \subseteq \mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right).$$

Montrons maintenant l'inclusion réciproque :

$$\mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right) \subseteq f\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right).$$

Soit $y \in \mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$. Alors il existe $\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f\left(u_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right).$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k \in \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)$ et donc

$$y = f\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right)}_{\in \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)} \in f\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right).$$

Par conséquent, $\mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right) \subseteq f\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right)$.
Conclusion, on a bien montré que $f\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$.
En particulier, si $\left(u_1, \ldots, u_n\right)$ est génératrice dans E alors

$$\mathrm{Im}\,(f) = f\,(E) = f\left(\mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right).$$

□

Exemple 10 : Dans chacun des cas, déterminer l'image de l'application.

1. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, 3x - y, x + y) \end{array}\right.$
2. $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$

Proposition II.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}\,(E, F)$ et $\mathscr{F} = \left(u_1, \ldots, u_n\right)$ une famille finie de vecteurs ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Si f est injective et $\mathscr{F}$ est libre alors $f\,(\mathscr{F}) = \left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$ est libre.
2. Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice dans E, alors $f\,(\mathscr{F}) = \left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$ est génératrice dans F.
3. Si f est un isomorphisme et si $\mathscr{F}$ est une base de E, alors $f\,(\mathscr{F}) = \left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$ est une base de F.

Démonstration.

1. Si f est injective et $\mathscr{F}$ est libre. Montrons que $\mathscr{F}' = f\,(\mathscr{F}) = \left(f\left(u_1\right), \ldots, f\left(u_n\right)\right)$ est libre. Soit $\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f\left(u_k\right) = 0_F.$$

Par linéarité de f, on en déduit que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right) = 0_F.$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in \text{Ker}(f)$. Or f est injective donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E.$$

Or $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est libre et donc pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i = 0$ ce qui démontre bien que $\mathscr{F}' = f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre.

2. Si f est surjective et si $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice dans E, alors par la proposition précédente,

$$\text{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \text{Im}(f).$$

Or f est surjective. Donc $\text{Im}(f) = F$ et donc

$$\text{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = F$$

i.e. $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est génératrice dans F.

3. Si $\mathscr{F}$ est une base de E, elle est libre et génératrice. Or f est bijective donc injective et surjective et donc d'après les deux points précédents, $\mathscr{F}' = (f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est libre et génératrice dans F. Autrement dit $\mathscr{F}'$ est une base de F.

□

Proposition II.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (qui est donc de dimension $n \in \mathbb{N}^*$).

1. L'application f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
2. L'application f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice dans F.
3. L'application f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Démonstration.

1. Si f est injective alors comme $\mathscr{B}$ est libre, par la proposition précédente, $f(\mathscr{B})$ est libre également. Montrons donc la réciproque. Supposons que $f(\mathscr{B})$ soit libre et montrons que f est injective. On utilise naturellement la caractérisation par le noyau. Soit $x \in Ker(f)$. Notamment $x \in E$. Or $\mathscr{B}$ est une base de E, donc il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (coordonnées de x dans $\mathscr{B}$) tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Par linéarité de f, on obtient que

$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k).$$

Or la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre par hypothèse. Donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi, $x = 0_E$. On a donc montré que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et donc l'application f est injective.

2. Si f est surjective alors comme $\mathscr{B}$ est génératrice dans E, par la proposition précédente, $f(\mathscr{B})$ est génératrice dans F. Montrons la réciproque. Réciproquement, si $f(\mathscr{B})$ est génératrice dans F,

$$F = \text{Vect}(f(\mathscr{B})) = \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop II.4}}}{=} f(\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathscr{B}\ \text{génératrice}}}{=} f(E) = \text{Im}(f),$$

ce qui montre bien que f est surjective.

3. Le troisième point découle des deux précédents.

□

Proposition II.7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille quelconque de n vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f(\mathscr{B}) = \mathscr{F}$ i.e. telle que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad f(e_i) = f_i.$$

Autrement dit une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Démonstration. *Existence.* Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$, on définit

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Puisque $\mathscr{B}$ est génératrice, f est bien définie sur E tout entier et puisque $\mathscr{B}$ est libre, on a l'unicité de la décomposition et donc $f(x)$ est bien définie de manière unique. De plus, il est clair que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f(e_i) = f_i$. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$. On note $(x_1, \dots, x_n)$ respectivement $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x respectivement de y dans la base $\mathscr{B}$,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Par combinaison linéaire on obtient

$$z = \lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) e_i.$$

Par unicité des coordonnées, on en déduit que les coordonnées de z dans la base $\mathscr{B}$ sont $(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda_n x_n + \mu_n y_n)$. Donc par définition de f,

$$f(z) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) f_i.$$

Ainsi,

$$f(z) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i f_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i f_i = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

ce qui démontre bien que f est linéaire : $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Unicité. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F telles que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i) = f_i$. Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) &= \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\
&= \sum_{i=1}^n x_i f_i \\
&= \sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

On a donc bien $f = g$ ce qui démontre l'unicité. □

Proposition II.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $E_1 \oplus E_2 = E$. Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$ deux applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.
Autrement dit une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions sur des sous-espaces supplémentaires.

Démonstration. Attention, il n'est pas question ici de dimension, on ignore si E ou F est de dimension finie ou non.
Existence. Pour tout $x \in E = E_1 \oplus E_2$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. On définit alors

$$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

On note que $f(x)$ est bien définie car f_1 est définie sur E_1 et $x_1 \in E_1$ et de même $x_2 \in E_2$ et f_2 et bien définie sur E_2. De plus l'unicité de la décomposition assure que l'on $f(x)$ est bien définie de manière unique. Donc f est bien

définie sur E tout entier. De plus pour tout $x \in E_1$, sa décomposition dans $E_1 \oplus E_2$ étant $x = x + 0_E$, on a facilement que $f(x) = f_1(x) + f_2(0_E) = f_1(x) + 0_F = f_1(x)$ car f_2 est linéaire. Donc $f_{|E_1} = f_1$. De même on vérifie bien que $f_{|E_2} = f_2$.
Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x,y) \in E^2$. Puisque $E = E_1 \oplus E_2$, il existe $(x_1, y_1) \in E_1^2$ et $(x_2, y_2) \in E_2^2$ tels que $x = x_1 + y_1$ et $y = y_1 + y_2$. Alors par définition de f,

$$f(x) = f_1(x_1) + f(x_2) \qquad \text{et} \qquad f(y) = f_1(y_1) + f_2(y_2).$$

Posons $z = \lambda x + \mu y$. Alors la décomposition de z dans $E_1 \oplus E_2$ est donnée par

$$z = \underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + f_2(\lambda x_2 + \mu y_2) && \text{par définition de } f \\ &= \lambda f_1(x_1) + \mu f_1(y_1) + \lambda f_2(x_2) + \mu f_2(y_2) && \text{car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires} \\ &= \lambda \underbrace{(f_1(x_1) + f_1(y_1))}_{=f(x)} + \mu \underbrace{(f_2(x_2) + f_2(y_2))}_{=f(y)}. \end{aligned}$$

Ainsi, il vient que

$$f(\lambda x + \mu y) = f(z) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Donc f est bien linéaire.
Unicité. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F telles que $f_{|E_1} = g_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = g_{|E_2} = f_2$. Montrons que $f = g$. Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc par linéarité

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) = g(x_1) + g(x_2) = g(x_1 + x_2) = g(x)$$

et ainsi $f = g$. □

II.3 Espaces isomorphes

Lemme II.9

Si E est un espace vectoriel de dimension infinie, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\mathscr{L}$ une famille libre de E de cardinal p.

Démonstration. On pose

$$\aleph = \{\,\text{Card}\,(\mathscr{L}) \in \mathbb{N} \mid \mathscr{L} \text{ est une famille libre de } E\,\}.$$

Puisque E est de dimension infinie, $E \neq \{0\}$ et donc E admet des familles libres (tout singleton de vecteur non nul de E par exemple). Donc $\aleph$ est non vide. Supposons $\aleph$ majorée. Comme $\aleph$ est une partie de $\mathbb{N}$, il admet alors un majorant, notons-le $m = \max(\aleph)$. Un maximum étant atteint, il existe $\mathscr{L}_m$ une famille libre de E de cardinal m. Puisque E est de dimension infinie et que $\mathscr{L}_m$ de cardinal fini, on sait que $\mathscr{L}_m$ n'engendre pas E. Donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin \text{Vect}(\mathscr{L}_m)$. Dès lors, la famille $\mathscr{L}_m \cup \{x\}$ est libre. Or elle est de cardinal $m + 1 > \max(\aleph)$ ce qui est absurde. Donc $\aleph$ n'est pas majorée. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on peut construire une famille libre de cardinal plus grand que p. Soit $\mathscr{L}_q$ une telle famille avec $q \geqslant p$ son cardinal. Comme une sous-famille d'une famille libre est toujours libre, quitte à enlever $q - p$ vecteurs de $\mathscr{L}_q$, on peut construire une famille $\mathscr{L}_p$ de E de cardinal p qui soit toujours libre. □

Proposition II.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
2. Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
3. Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.

1. Supposons f injective. Si F est de dimension infinie alors le point 1 n'énonce rien. Supposons donc F de dimension finie et posons $p = \dim(F) \in \mathbb{N}$. Supposons que E est de dimension infinie. Alors d'après le lemme précédent, E admet (au moins) une famille libre $\mathscr{L}$ de cardinal égal à $p+1$. Puisque f est injective alors par la proposition II.6, $f(\mathscr{L})$ est une famille libre de F mais possédant $p+1 > \dim(F)$ vecteurs ce qui est absurde. Donc E est de dimension finie. Notons $n = \dim(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E qui est donc de cardinal n. Puisque $\mathscr{B}$ est libre et f injective, toujours par la proposition II.6, $f(\mathscr{B})$ est libre dans F. Donc
$$\dim(E) = n = \text{Card}\,(scrB) = \text{Card}\,(f(\mathscr{B})) \leqslant p = \dim(F).$$
2. Supposons maintenant f surjective. Si E est de dimension infinie alors le point 2 n'énonce rien. Supposons donc E de dimension finie et notons $n = \dim(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, alors $\text{Card}\,(\mathscr{B}) = n$. De plus $\mathscr{B}$ est génératrice dans E et f est surjective, donc d'après la proposition II.6, $f(\mathscr{B})$ est génératrice dans F. Donc F est de dimension finie et plus précisément,
$$\dim(E) = n = \text{Card}\,(\mathscr{B}) = \text{Card}\,(f(\mathscr{B})) \geqslant p = \dim(F).$$
3. Le point 3 découle des deux points précédents.

□

Proposition II.11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Les espaces E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. Si E et F sont isomorphes, on a déjà vu dans la proposition II.10 qu'alors $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement si $\dim(E) = \dim(F) = n \in \mathbb{N}$, montrons l'existence d'un isomorphisme entre E et F. Si $n = 0$, le résultat est évident. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Par la propriété précédente, il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $f(e_i) = f_i$. L'image d'une base par f est une base donc par le point 3 de la proposition II.6, on en déduit que f est bijective ce qui conclut la démonstration.

□

Théorème II.12 Classification des espaces vectoriels de dimension finie

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. C'est un corollaire direct du résultat précédent.

□

Application : démonstration de la caractérisation des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
Soit $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, avec $c \neq 0$. On considère l'ensemble suivant :
$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \right\}$$
On suppose ici que $\Delta = b^2 - 4c > 0$ et on pose $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E.
4. Montrer que $\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de E.

III Théorème du rang

Définition III.1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. On appelle **rang** de la l'application linéaire f, noté $\text{rg}(f)$ la dimension de l'image de f :
$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Remarque 11 :

1. Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors
$$\operatorname{rg}(f) = \dim\left(f\left(\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)\right) = \operatorname{rg}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right).$$
2. Si F est de dimension finie, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si
$$\operatorname{Im}(f) = F \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{rg}(f) = \dim(F).$$

Exemple 12 : Soit
$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \to & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & X^2\left(P(X+1) - P(X-1) - 2P'(X)\right). \end{array} \right.$$
Vérifier que f est linéaire et déterminer son rang.

Proposition III.2

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ deux applications linéaires.
1. $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$.
2. $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f))$.
3. Si g est un isomorphisme (en fait injective suffit) alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.
4. Si f est un isomorphisme (en fait surjective suffit) alors $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g)$.

Démonstration.
1. Soient $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $\operatorname{rg}(f) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(f(e_1), \ldots, f(e_n)\right)\right) \leqslant n$. De plus $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F donc $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$. Conclusion,
$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F)).$$
2. Soit $p = \operatorname{rg}(f)$. Alors $p = \dim(\operatorname{Im}(f))$. Posons $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\operatorname{Im}(f)$.
$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(g \circ f(E)) = \dim(g(f(E))) &= \dim(g(\operatorname{Im}(f))) \\ &= \dim(g(\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p))) \\ &= \dim(\operatorname{Vect}(g(f_1), \ldots, g(f_p))) \leqslant p = \operatorname{rg}(f). \end{aligned}$$
D'autre part, puisque $\operatorname{Im}(f) \subseteq F$, on a
$$\operatorname{Im}(g \circ f) = g \circ f(E) = g(f(E)) = g(\operatorname{Im}(f)) \subseteq g(F) = \operatorname{Im}(g).$$
Ainsi,
$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g)$$
et donc
$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)).$$
3. Supposons g injective. Soient $p = \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$ et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\operatorname{Im}(f)$. Puisque g est injective et que $\mathscr{F}$ est libre, $g(\mathscr{F}) = (g(f_1), \ldots, g(f_p))$ est aussi une famille libre de G. Montrons qu'elle est incluse dans $\operatorname{Im}(g \circ f)$. Soit $i[\![1;p]\!]$. On a $f_i \in \operatorname{Im}(f)$. Donc il existe $e_i \in E$ tel que $f_i = f(e_i)$. Donc $g(f_i) = g \circ f(e_i) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Ce ci étant vrai pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ on en déduit bien que $g(\mathscr{F})$ est une famille libre de $\operatorname{Im}(f \circ g)$. Ainsi $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) \geqslant \text{Card}\,(g(\mathscr{F})) = p = \operatorname{rg}(f)$. Or par le point précédent, on sait déjà que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f)$. Conclusion
$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f).$$
4. On suppose maintenant que f est surjective alors, $\operatorname{Im}(f) = F$. Donc
$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim(g(f(E))) = \dim(g(\operatorname{Im}(f))) = \dim(g(F)) = \operatorname{rg}(g).$$

□

Théorème III.3 (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(f) = \dim(E).$$

Démonstration. Soient $n = \dim(E)$. Puisque Ker (f) est un sous-espace vectoriel de E, Ker (f) est de dimension finie. Notons p sa dimension et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de Ker (f). Supposons $p < n$ sinon f est l'application nulle et le théorème s'en déduit directement. Puisque $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de E, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n) \in E^{n-p}$ tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) \\
&= \mathrm{Vect}\,(0_F, \ldots, 0_F, f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) && \text{car pour tout } i \in [\![1;p]\!],\ e_i \in \mathrm{Ker}\,(f) \\
&= \mathrm{Vect}\,(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)).
\end{aligned}$$

Montrons que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, f(e_i) = 0_F.$$

Par linéarité,

$$f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i\right) = 0_F \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i \in \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p).$$

Donc il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0_F$$

Or $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre (car est une base de E) donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = -\lambda_{p+1} = \cdots = -\lambda_n = 0$. En particulier, pour tout $i \in [\![p+1;n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et donc $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre. On a vu précédemment qu'elle est génératrice dans $\mathrm{Im}\,(f)$ et constitue donc une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension finie égale à p :

$$\mathrm{rg}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = n - p = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f)).$$

□

Remarque 13 :

1. La dimension de l'espace F n'intervient pas dans le théorème du rang. En particulier, F peut même être de dimension infinie.
2. Grâce au théorème du rang, on note que, lorsque E est de dimension finie,

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(f) = \dim(E).$$

Exemple 14 : Déterminer le rang de

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (2X+2)\,P - \left(X^2 - 1\right) P'. \end{array} \right.$$

Exemple 15 : Redémontrer la proposition II.10 à l'aide du théorème du rang et en supposant E de dimension finie.

Théorème III.4 Caractérisation des isomorphismes

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si au moins deux parmi les trois suivantes sont vérifiées

1. $\dim(E) = \dim(F)$
2. f est injective
3. f est surjective

alors f est un isomorphisme de E dans F.

Démonstration.

- Supposons les points 1 et 2. Alors par le point 2, Ker $(f) = \{0_E\}$ et donc $\dim(\text{Ker}\,(f)) = 0$. Par le théorème du rang, $\text{rg}\,(f) = \dim(E)$ et donc par le point 1, $\text{rg}\,(f) = \dim(F)$ et donc $\text{Im}\,(f) = F$ et f est surjective. Ainsi f est injective et surjective et est donc bijective.
- Supposons les points 1 et 3. Par le point 3, $\text{rg}\,(f) = \dim(F)$ et par le point 1, $\text{rg}\,(f) = \dim(E)$. Donc par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}\,(f)) = 0$ i.e. Ker $(f) = \{0_E\}$ ou encore f est injective. Or on a déjà supposé f surjective, donc f est bijective.

□

Remarque 16 : Si E et F sont de dimension finie et tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors la proposition précédente peut se reformuler de la façon suivante : on a les équivalences suivantes

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est un isomorphisme.}$$

Exemple 17 : Démontrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \to & (a+b)\,X^2 + (b+c)\,X + (a+b+c)\,. \end{array} \right.$$

Proposition III.5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. On considère l'équation linéaire d'inconnu un vecteur x suivante :

$$f(x) = b \qquad (E)$$

On note $\mathcal{S} = \{\, x \in E \mid f(x) = b \,\}$ l'ensemble des solutions de (E).

1. Si $b \notin \text{Im}\,(f)$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. Si $b \in \text{Im}\,(f)$, alors $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et admet au moins une solution $x_0 \in \mathcal{S}$. Dans ce cas, l'ensemble de toutes les solutions est donné par

$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker}\,(f) = \{\, x_0 + x \in E \mid x \in \text{Ker}\,(f) \,\} = \{\, u \in E \mid u - x_0 \in \text{Ker}\,(f) \,\}\,.$$

Démonstration. Si $b \in \text{Im}\,(f)$, par définition de l'image, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$ et donc $x_0 \in \mathcal{S}$ est une solution de (E). Montrons que $\mathcal{S} = \{\, u \in E \mid u - x_0 \in \text{Ker}\,(f) \,\}$. Soit $u \in \mathcal{S}$. Alors $f(u) = b = f(x_0)$. Donc par linéarité de f, $f(u - x_0) = f(x) - f(x_0) = b - b = 0_F$. Donc $u - x_0 \in \text{Ker}\,(f)$.
Réciproquement soit $u \in E$ tel que $u - x_0 \in \text{Ker}\,(f)$. Alors par linéarité de f,

$$f(u) = f(x_0 + u - x_0) = f(\underbrace{x_0}_{\in \mathcal{S}}) + f(\underbrace{u - x_0}_{\in \text{Ker}\,(f)}) = b + 0_F = b.$$

Donc $u \in \mathcal{S}$. Conclusion,

$$\mathcal{S} = \{\, u \in E \mid u - x_0 \in \text{Ker}\,(f) \,\}\,.$$

□

Remarque 18 :

- On dit dans ce cas que $\mathcal{S}$ est un espace affine de direction vectorielle Ker (f).
- Nous avons déjà croisé cette situation lors de la résolution d'équations différentielles linéaires avec second membre ou lors de résolution d'un système d'équations linéaires avec second membre.

Exemple 19 : Si Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2x + 3y = 1$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x + 3y \end{array} \right. .$$

On a alors

$$\mathcal{S} = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = 1 \,\right\}.$$

On note que $\mathcal{S}$ n'est pas vide car $x_0 = (1, -1)$ par exemple est une solution. On a alors

$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker }(f)\,.$$

Or

$$\begin{aligned}\text{Ker }(f) = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x+3y=0 \,\right\} &= \left\{ \left(-\frac{3}{2}y, y\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{\, \tilde{y}\,(3\tilde{y}, -2\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tilde{y} = -2y \in \mathbb{R} \,\right\} \\ &= \text{Vect}\,(3,-2)\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = (1,-1) + \text{Vect}\,(3,-2) = \left\{\, (1+3t, -1-2t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \,\right\}.$$

C'est donc une droite affine dans $\mathbb{R}^2$, dont on a donné l'équation paramétrique.