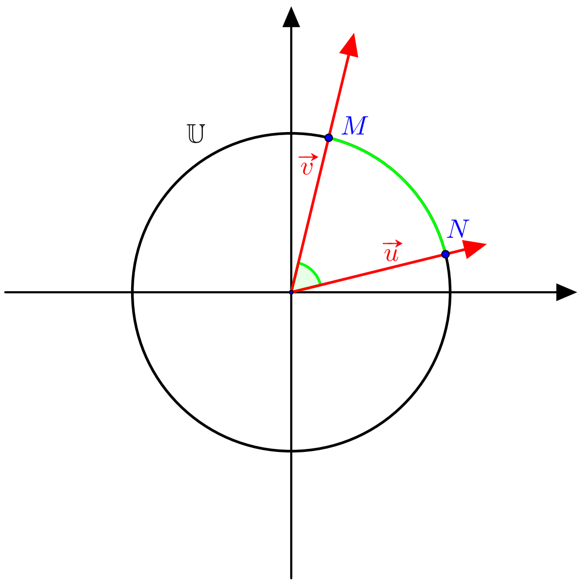
Chapitre II : Trigonométrie

I Définition

Dans le plan munit d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ on considère le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **le cercle unité** ou **le cercle trigonométrique** et noté $\mathbb{U}$.
On oriente le cercle $\mathbb{U}$ dans **le sens trigonométrique** qui est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

Définition I.1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On note M, respectivement N, le point d'intersection du cercle unité $\mathbb{U}$ avec la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$, respectivement de vecteur directeur $\vec{v}$. La mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ **en radian** est égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{MN}$ compté positivement dans le sens trigonométrique et négativement sinon.



Remarques 1 :

- La valeur d'un angle n'est défini qu'à 2π-près. Par exemple un quart de cercle vaut $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2} = \dots$.
- Par enroulement de la droite des réels sur le cercle unité, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ correspond un point sur le cercle trigonométrique et un angle associé.

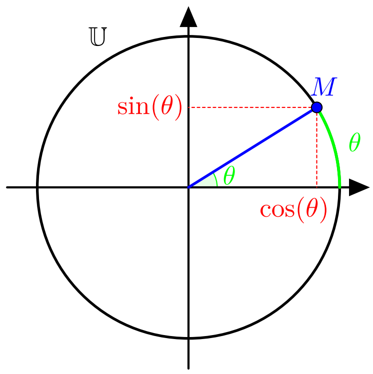
Définition I.2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère le point $M \in \mathbb{U}$ du cercle unité tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. On définit alors le **cosinus** de θ, noté $\cos(\theta)$, respectivement le **sinus** de θ, noté $\sin(\theta)$, comme étant l'abscisse, respectivement l'ordonnée, du point M.

Définition I.3

- La **fonction cosinus**, notée cos est la fonction qui à tout réel θ associe son cosinus, $\cos(\theta)$.
- La **fonction sinus**, notée sin est la fonction qui à tout réel θ associe son sinus, $\sin(\theta)$.

Remarque 2 : Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.



Remarque 3 : Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle. Soit ABC un triangle rectangle en B. On désigne par θ l'angle $\widehat{BAC}$. Par translation (transformation du plan conservant les angles et les distances), on déplace le triangle pour amener le point A à l'origine. Par rotation (transformation du plan conservant les angles et les distances), du triangle autour du point O il est possible de faire coïncider la droite (OB) avec l'axe des abscisses tel que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{i}$ soient de même sens. On note C' le point d'intersection de (OC) avec le cercle unité $\mathbb{U}$. Les coordonnées du point C' sont donc $C'\,(\cos(\theta);\sin(\theta))$. On note B' le point de coordonnées $(\cos(\theta);0)$. D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}$ ou encore :

$$\frac{AB}{AC}=\frac{OB}{OC}=\frac{OB'}{OC'}=\cos(\theta).$$

On retrouve bien l'antique formule $\cos(\theta)=\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$. On peut procéder de même pour montrer que l'on a également $sin(\theta)=\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

Proposition I.4 (conséquences immédiates)

- Les fonctions cosinus et sinus sont bornées. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,
$$-1\leqslant\cos(\theta)\leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad -1\leqslant\sin(\theta)\leqslant 1.$$
- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$,
$$\cos(\theta+2k\pi)=\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta+2k\pi)=\sin(\theta).$$
- La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,
$$\cos(-\theta)=\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(-\theta)=-\sin(\theta).$$

II Formulaire

Avant de donner une étude plus poussée des fonctions sinus et cosinus, nous allons établir des formules qui nous seront utiles par la suite.

Proposition II.1

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1.$$

Démonstration. Découle simplement de la définition des fonctions cosinus et sinus. Soient $x\in\mathbb{R}$, M le point de coordonnées $(\cos(x);\sin(x))$ et $N\,(\cos(x);0)$ dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Le triangle OMN est rectangle en M. Donc d'après le théorème de Pythagore, $1=OM^2=ON^2+NM^2=\cos^2(x)+\sin^2(x)$. □

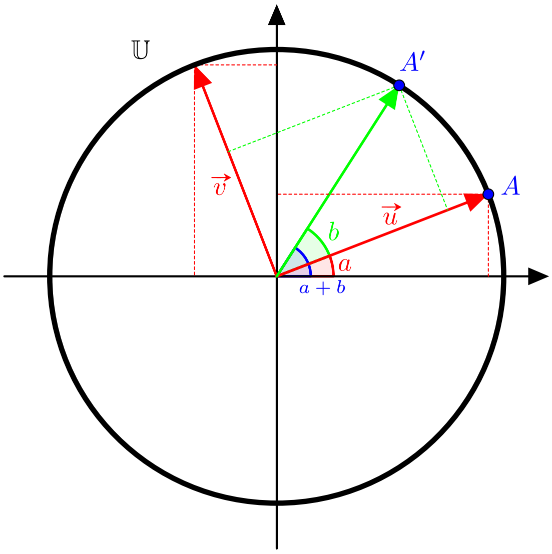
Exemple 4 : On admet que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Proposition II.2

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).$$

Démonstration. On fixe deux réels a et b et dans le repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on définit les points $A(\cos(a);\sin(a))$ et $A'(\cos(a+b);\sin(a+b))$. On pose également $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}$ tel que $\mathscr{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ soit un repère orthonormé, c'est-à-dire tel que $\|\vec{v}\| = 1$, et tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.



Notez que dans ce nouveau repère, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(1;0)$. Le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ quant à lui peut être obtenu par rotation d'angle b du vecteur $\overrightarrow{OA}$ autour du point O. Autrement dit le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ a pour coordonnées $(\cos(b);\sin(b))$ dans le repère $\mathscr{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Donc

$$\overrightarrow{OA'} = \cos(b)\vec{u} + \sin(b)\vec{v}.$$

Or $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ et $\vec{v} = \cos(a)\vec{j} + \sin(a)\left(-\vec{i}\right) = \cos(a)\vec{j} - \sin(a)\vec{i}$. Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA'} &= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(\cos(a)\vec{j} - \sin(a)\vec{i}\right)\\ &= \cos(a)\cos(b)\vec{i} + \cos(b)\sin(a)\vec{j} + \cos(a)\sin(b)\vec{j} - \sin(a)\sin(b)\vec{i}\\ &= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\,\vec{i} + [\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)]\,\vec{j}.\end{aligned}$$

Or dans le repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA'}$ sont $(\cos(a+b);\sin(a+b))$. Donc par unicité des coordonnées dans un même repère, on en déduit que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).$$

□

Corollaire II.3

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b).$$

Démonstration. Découle immédiatement de la Proposition II.2 en remplaçant b par $-b$ et de la parité ou de l'imparité des fonctions cosinus et sinus.

□

Corollaire II.4 (Formules de linéarisation)

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(b-a)}{2}.$$

Démonstration. Ces inégalités s'obtiennent en sommant ou soustrayant les formules des Propositions II.2 et II.3. $\square$

Corollaire II.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Démonstration. Découle du corollaire II.4 avec $a = b = x$ ou encore de la Proposition II.2 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ et donc $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. $\square$

Exemple 5 : Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^3(x)$.

Remarque 6 : La Proposition II.2 doit être connue sur le bout des doigts ! Vous pouvez apprendre les Propositions II.3 à II.5 également par coeur mais je vous conseille plutôt d'apprendre à les retrouver RAPIDEMENT à partir de la Proposition II.2. Dans tous les cas une restitution rapide et correcte est attendue sur toutes ces formules.

Proposition II.6 (Formules de factorisation)

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Démonstration. Fixons $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et définissons a et b tels que $p = a+b$ et $q = a-b$, c'est-à-dire $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$. Alors d'après la Proposition II.2, on a

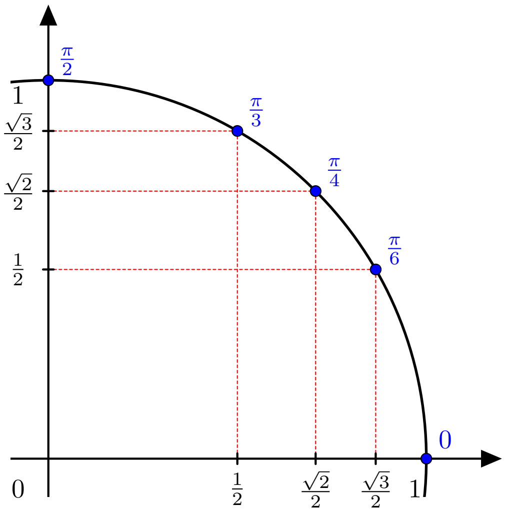
$$\begin{aligned}
\cos(p)+\cos(q) &= \cos(a+b)+\cos(a-b) \\
&= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
&= 2\cos(a)\cos(b) && \textit{(on retrouve une égalité de la Proposition II.4)} \\
&= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 7 : Démontrer de même les autres égalités.

Proposition II.7 (Valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration. D'après la définition des fonctions cosinus et sinus, on a $\cos(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 1$.
D'après la Proposition II.2 (ou directement par la Proposition II.5), on écrit que

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1.$$

Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Remarquez bien que l'on pouvait obtenir ce résultat directement par la Proposition II.5 (le calcul ci-dessus retrace la démonstration de la Proposition II.5). Or pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\cos(x) \geqslant 0$. D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De même $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Démontrons les valeurs des fonctions cosinus et sinus en $\frac{\pi}{3}$. D'après la Proposition II.2,

$$\begin{aligned}
-1 = \cos(\pi) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

On élimine le sinus grâce à la Proposition II.1 et on obtient

$$-1 = \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Notons $X = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Le réel X est alors solution de l'équation

$$4X^3 - 3X + 1 = 0.$$

On s'aperçoit que -1 est une solution évidente, on peut donc factoriser $4X^3 - 3X + 1$ par $X + 1$. Donc le réel X est solution de l'équation

$$4X^3 - 3X + 1 = (X+1)\left(4X^2 - 4X + 1\right) = (X+1)(2X-1)^2 = 0.$$

Les solutions sont donc $X = -1$ ou $2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Comme le cosinus est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq -1$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pour en déduire la valeur du sinus, on utilise la Proposition II.1,

$$1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Puis, comme le sinus est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La démonstration des valeurs de cosinus et sinus en $\frac{\pi}{6}$ est laissée en exercice.

□

Exemple 8 : A l'aide de la Proposition II.6, calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Proposition II.8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Exercice 9 : Démontrer ces formules à l'aide de la Proposition II.2.

Exemple 10 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, simplifier $\cos(x + k\pi)$ et $\sin(x + k\pi)$.

Remarques 11 :

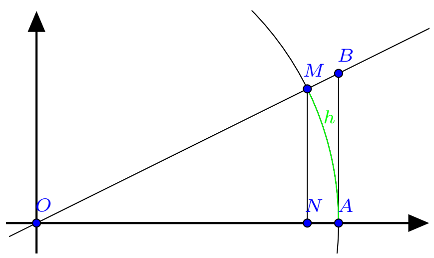
- Ces égalités découlent de la Proposition II.2 mais vous devez savoir les retrouver rapidement à l'aide de dessins.
- Grâce à ces égalités, il est possibles d'étendre (et de retrouver si besoin) les valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus sur le cercle entier (et non juste le premier quart de cercle de la Proposition II.7).

III Propriétés

Proposition III.1 (Limites remarquables)

- $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$
- $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$

Démonstration. Notations. Soit $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, on considère les points $M(\cos(h); \sin(h))$, $N(\cos(h); 0)$, $A(1; 0)$ et B le point d'intersection de (OM) avec la droite perpendiculaire à (OA) passant par A.



Continuité de cosinus en 0**.** Commençons par montrer que la fonction cosinus est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim_{h\to 0}\cos(h) = 1$. Puisque $h = \widehat{MN} \geqslant NM \geqslant NA$, on en déduit que $1 = ON + NA = \cos(h) + NA \leqslant \cos(h) + h$ et bien sûr $\cos(h) \leqslant 1$. Donc

$$\forall h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad 1 - h \leqslant \cos(h) \leqslant 1.$$

Si $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, on a $-h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $1+h \leqslant \cos(-h) \leqslant 1$. Donc par parité de la fonction cosinus, $1+h \leqslant \cos(h) \leqslant 1$. Enfin, si $h = 0$ l'inégalité est trivial. Donc

$$\forall h \in \left]\tfrac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad 1 - |h| \leqslant \cos(h) \leqslant 1.$$

En passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient bien

$$\lim_{h\to 0}\cos(h) = 1$$

Première limite. Montrons maintenant la limite de $\frac{\sin(h)}{h}$ en 0. Fixons à nouveau $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et reprenons les points précédemment définies. On a $MN \leqslant \widehat{MN} \leqslant AB$. Or $MN = \sin(h)$, $\widehat{MN} = h$ et par le théorème de Thalès (les droites (MN) et (AB) étant perpendiculaires à la même droite (OA), sont parallèles entre elles),

$$\frac{MN}{AB} = \frac{ON}{OA} \Leftrightarrow \frac{\sin(h)}{AB} = \frac{\cos(h)}{1} \Leftrightarrow AB = \frac{\sin(h)}{\cos(h)}.$$

Notez bien que l'on ne divise par par 0 car $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow AB \neq 0$ et $\cos(h) \neq 0$. Ainsi l'inégalité $MN \leqslant \widehat{MN} \leqslant AB$ implique que

$$\sin(h) \leqslant h \leqslant \frac{\sin(h)}{\cos(h)}.$$

Par positivité stricte de h et de $\cos(h)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que

$$\forall h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

Par parité du cosinus et imparité du sinus, on obtient également pour tout $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\cos(-h) \leqslant \frac{\sin(-h)}{-h} \leqslant 1 \Leftrightarrow \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1$. Donc

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

Or nous avons vu que $\lim_{h\to 0}\cos(h) = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Seconde limite. Montrons maintenant $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$. D'après la Proposition II.2, on a

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

Donc

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2.$$

Or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h}{2} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, donc par composition de limites, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$. Puis par continuité de la fonction carré, on conclut que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

□

Proposition III.2

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos'(x) = -\sin(x).$$
- La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. D'après la Proposition II.2, on a

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h)+\cos(h)\sin(x)-\sin(x)}{h} = \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)h\frac{1-\cos(h)}{h^2}.$$

Donc en utilisant le Proposition III.1 et par produits et somme de limites finies, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \cos(x) \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} h \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2}\\ &= \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0 \times \frac{1}{2}\\ &= \cos(x).\end{aligned}$$

Donc la fonction cosinus est dérivable au point x et $\sin'(x) = \cos(x)$.
La dérivabilité de la fonction sinus est similaire et est laissée en exercice.

$\square$

De la proposition précédente et du signe des fonctions cosinus et sinus, on en déduit leurs tableaux de variations.

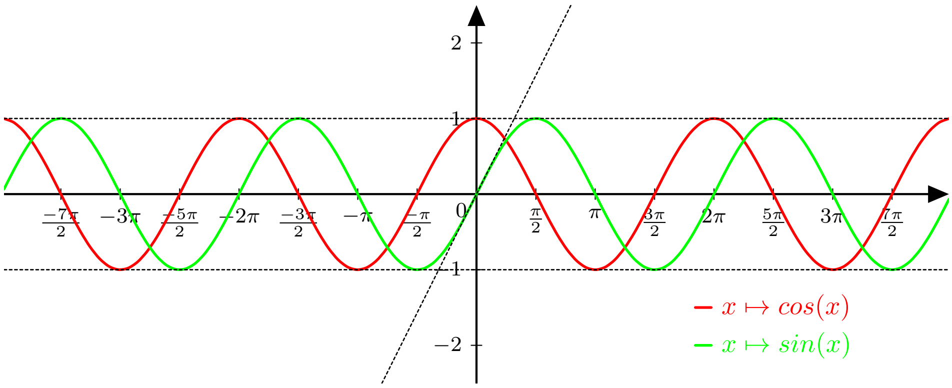
Proposition III.3

- La fonction cosinus est une fonction 2π-périodique, paire, dont le tableau de variations sur $[0;2\pi]$ est le suivant.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$x \mapsto \cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

- La fonction sinus est une fonction 2π-périodique, impaire, dont le tableau de variations sur $[0;2\pi]$ est le suivant.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



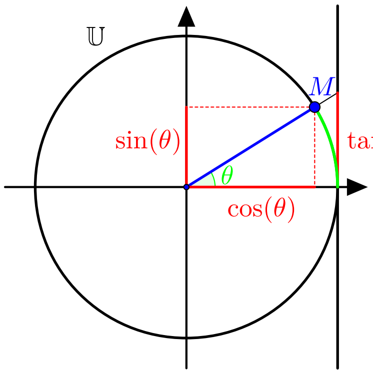
Remarque 12 : Pour mémoriser si la dérivée de cos est $+\sin$ ou $-\sin$, on peut retrouver ce résultat graphiquement en observant que, après 0, le cosinus décroit et que donc sa dérivée est négative : $\cos' = -\sin$ tandis que le sinus a une pente positive en 0 et donc a une dérivée positive : $\sin' = \cos$.

IV La fonction tangente

Définition IV.1

Sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ on définit la fonction **tangente** notée tan par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Proposition IV.2

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration. La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables ne s'annulant pas sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc la fonction tangente est dérivable sur cet ensemble et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Mais en utilisant également l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on peut aussi l'écrire :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

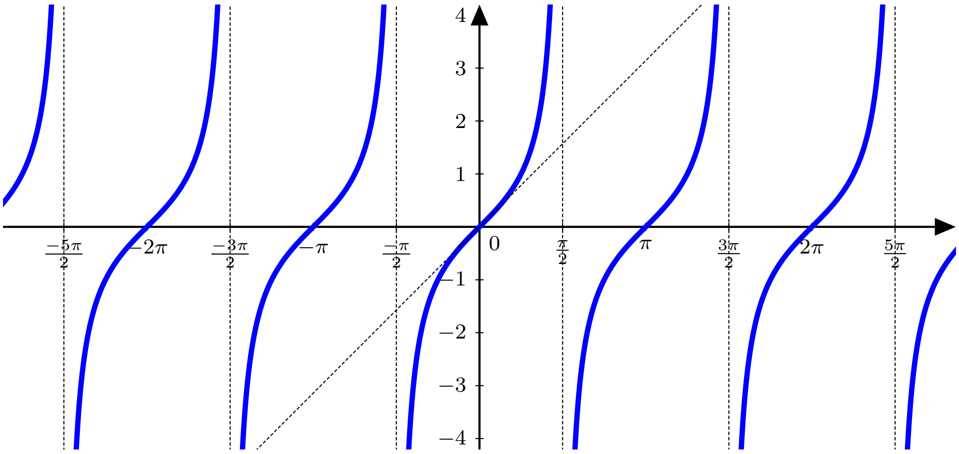
□

Proposition IV.3

La fonction tangente est π-périodique, impaire et croissante sur tous les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$. Son tableau de variation est le suivant.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$x \mapsto \tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. $\square$



Proposition IV.4

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition IV.5 (Limite remarquable)

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1$$

Démonstration. Puisque $\tan(0) = 0$, on reconnait la limite du taux d'accroissement de la fonction tangente en 0, donc

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)-\tan(0)}{h-0} = \tan'(0) = 1+\tan^2(0) = 1.$$

$\square$

Proposition IV.6

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que a, b et $a+b$ soient dans l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

Notamment pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$,

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

Proposition IV.7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que les quantités suivantes soient bien définies,

- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\tan(x \pm \pi) = \tan(x)$
- $\tan\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$

Exemple 13 : Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Proposition IV.8 (Formules de l'angle moitié)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que les quantités suivantes soient bien définies. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. D'après la Proposition II.2,

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1.$$

Or, nous avons vu que pour tout $\tan'\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. Donc $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$. Ainsi,

$$\cos(x) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

D'après la Proposition II.2,

$$\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)t.$$

Or nous avons vu que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$. Donc

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin pour la dernière égalité, on peut utiliser la Proposition IV.6 ou directement grâce aux précédentes inégalités, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right)$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

□

V Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques

V.1 Introduction aux congruences

Définition V.1

Soient x, y et α trois réels. On dit que x est **congru** à y **modulo** α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x - y = k\alpha.$$

On note alors

$$x \equiv y \ [\alpha].$$

Proposition V.2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La congruence est transitive. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x \equiv y\ [\alpha] \\ y \equiv z\ [\alpha] \end{cases} \Rightarrow \quad x \equiv z\ [\alpha].$$

- La congruence est compatible avec l'addition et la soustraction. Pour tout $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} x_1 \equiv y_1\ [\alpha] \\ x_2 \equiv y_2\ [\alpha] \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2\ [\alpha] \\ x_1 - x_2 \equiv y_1 - y_2\ [\alpha]. \end{cases}$$

- La congruence n'est pas compatible avec la multiplication. Pour tout $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$,

$$x \equiv y\ [\alpha] \quad \Rightarrow \quad \lambda x \equiv \lambda y\ [\lambda\alpha].$$

Exemples 14 :

- Si $x \equiv y\ [2\pi]$ alors $\cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$.
- Si $x \equiv y\ [\pi]$ alors $\cos(x) = \pm\cos(y)$, $\sin(x) = \pm\sin(y)$ et $\tan(x) = \tan(y)$.
- La fonction tangente est définie sur $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \right\}$.

V.2 Equations

Proposition V.3

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

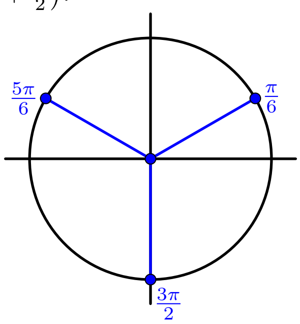
$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv y\ [2\pi] \text{ OU } x \equiv -y\ [2\pi] \\ \sin(x) = \sin(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv y\ [2\pi] \text{ OU } x \equiv \pi - y\ [2\pi] \\ \cos(x) = \cos(y) \text{ ET } \sin(x) = \sin(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv y\ [2\pi] \end{aligned}$$

Remarque 15 : Cette proposition n'est pas à apprendre par coeur mais doit pouvoir se retrouver facilement à l'aide d'un schéma.

Exemple 16 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'équation* $\cos(2x - \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

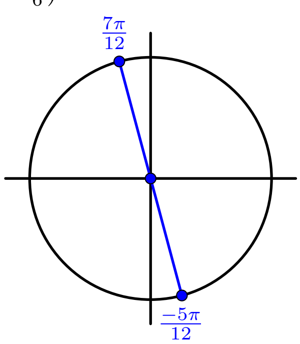
$$\begin{aligned} \cos(2x - \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - \pi \equiv x + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } 2x - \pi \equiv -x - \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$



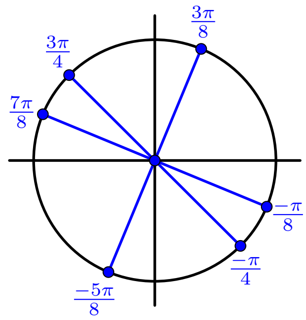
Exemple 17 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'équation* $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{3} \equiv x + \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv \pi - x - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [\pi]. \end{aligned}$$



Exemple 18 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'équation* $\sin(3x) = \cos(x+\pi)$.
Un sinus est un cosinus qui s'ignore et réciproquement. Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\sin(3x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. Ainsi,

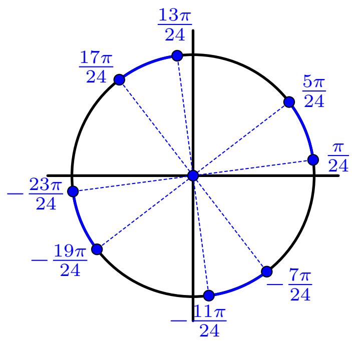


$$\begin{aligned}
\sin(3x) = \cos(x+\pi) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x+\pi) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{2} \equiv x + \pi \ [2\pi] \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{2} \equiv -x - \pi \ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{4} \ [\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{8} \ \left[\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

V.3 Inequations

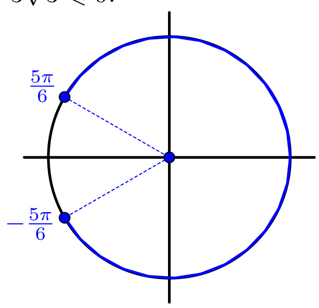
Exemple 19 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'inéquation* $4\sin(4x) + 3 > 5$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,



$$\begin{aligned}
4\sin(4x) + 3 > 5 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(4x) > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 4x \in \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left]\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right[.
\end{aligned}$$

Exemple 20 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'inéquation* $6\cos(x+\pi) - 3\sqrt{3} \leqslant 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,



$$\begin{aligned}
6\cos(x+\pi) - 3\sqrt{3} \leqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x+\pi) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x + \pi \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right] \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left[\frac{-5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right].
\end{aligned}$$

V.4 Paramétrage du cercle trigonométrique et applications

Proposition V.4

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
- Réciproquement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, alors il existe un unique $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$x = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad y = \sin(\theta).$$

Démonstration. Le premier point est un rappel de la Proposition II.1.
Pour le second point, fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et observons que $x^2 = 1 - y^2 \leqslant 1$. Donc $x \in [-1; 1]$. Or $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ et la fonction cosinus est continue sur $[0; \pi]$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta_0 \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta_0) = x$. Par conséquent, $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(\theta_0) = \sin^2(\theta_0)$. Procédons par disjonction de cas :

- Si, $y \geqslant 0$, on pose $\theta = \theta_0 \in [0; \pi]$. Alors $y = \sin(\theta)$ et $x = \cos(\theta)$.
- Sinon, si $y < 0$, on pose $\theta = -\theta_0 + 2\pi \in [\pi; 2\pi]$. Observons que dans ce cas $\theta_0 \neq 0$ car sinon $y^2 = \sin^2(2\pi) = 0$. Donc $\theta \in [\pi; 2\pi[$. Alors $\sin(\theta) = \sin(-\theta_0) = -\sin(\theta_0)$ donc $y^2 = \sin^2(\theta)$ et comme les deux membres de cette égalité sont de même signe (négatif), on en déduit que $y = \sin(\theta)$. Enfin on vérifie bien que $x = \cos(\theta_0) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

Dans tous les cas on a démontré l'existence d'un réel $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.
L'unicité découle du point 3 de la proposition V.3.

□

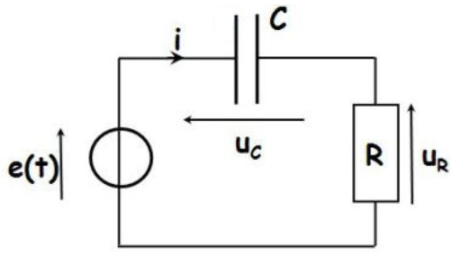
Application : forme polaire de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$.
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Puisque $(a, b) \neq (0, 0)$, on a $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$. Donc

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\theta)\right).$$

Posons $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alors il est facile de vérifier que $x^2 + y^2 = 1$. Donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\varphi)$. Ainsi,

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta - \varphi).$$

Exemple 21 :
Dans un circuit électrique, on considère une résistance R et un condensateur de capacité C en série. On suppose que l'intensité i est en fonction du temps t sinusoïdale : $i(t) = I\cos(\omega t)$, avec I et ω deux réels.



1. *Exprimer la tension aux bornes de l'ensemble résistance-condensateur, notée $e(t)$.*
2. *On suppose que $C = \frac{1}{R\omega}$, montrer alors que la tension e est un signal sinusoïdal déphaser de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité et déterminer son amplitude.*

1. La tension aux bornes de la résistance est donnée par $u_R(t) = Ri(t) = RI\cos(\omega t)$. La tension aux bornes du condensateur est liée à l'intensité par la relation $Cu_C'(t) = i(t) = I\cos(\omega t) \Leftrightarrow u_C'(t) = \frac{I}{C}\cos(\omega t)$. Donc en intégrant cette égalité, $u_C(t) = \frac{I}{C\omega}\sin(\omega t)$. Les tensions en séries s'ajoutent donc

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = RI\cos(\omega t) + \frac{I}{C\omega}\sin(\omega t).$$

2. On suppose que $C = \frac{1}{R\omega}$. Donc,

$$e(t) = RI\left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right).$$

On applique désormais le procédé vu précédemment :

$$\begin{aligned} e(t) &= \sqrt{2}RI\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)\right) \\ &= \sqrt{2}RI\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\omega t)\right) \\ &= \sqrt{2}RI\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'amplitude de e est $\sqrt{2}RI$ et qu'il est déphasé de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité $i(t)$.

Note historique : le mot « sinus » est un mot latin signifiant « courbe, pli, cavité ». Il a donné en français les mots « sein » (en italien le sinus mathématique se dit « seno » qui signifie également « sein ») et « sinueux ».
*L'histoire du mot « sinus » vient probablement d'une erreur de traduction. Au VIième siècle, le mathématicien indien Âryabhata utilise le mot **jîva** qui signifie « corde ». Au VIIIième siècle, le mathématicien arabe Al-Fazzârî arabise le mot en **jîba** (n'ayant aucune signification en arabe). C'est alors qu'au XIIième siècle, l'écrivain et traducteur italien Gerard de Crémone confond **jîba** avec **jaîb**, d'autant plus facilement qu'en arabe les voyelles sont parfois omises. **Jaîb** signifiant « poche, cavité », il le traduisit en latin par « sinus ». Le mot « cosinus » (de co-sinus) date lui du XVIIIième siècle.*

Un sinus et un cosinus sont bons amis. Le sinus est fêtard et le cosinus plutôt pantouflard mais un soir le sinus convainc le cosinus de sortir avec lui en boîte de nuit. Comme à son habitude le sinus s'amuse bien mais le cosinus reste boudeur au bar. Quand le sinus lui demande ce qui ne va pas le cosinus lui répond :
« -Tu es sympa mais dans cette boîte je n'ai rencontré que des sinus et aucun cosinus.
-Allez fais un effort, tu n'as qu'à t'intégrer ! »