Chapitre XXI : Séries

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera dit une suite *numérique*.

I Généralités

Définition I.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle **série numérique** de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ désigne alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est appelé la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque 1 : Attention aux notations ne confondez pas

- la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ qui est une suite particulière (n y est un indice muet),
- le terme général u_n de la série qui est à n fixé un réel/complexe,
- la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ qui est à n fixé un réel/complexe.

Exemple 2 :

1. Calculer la série dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$.
2. Calculer la série dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
3. Calculer la série dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3$.
4. *(Somme d'une suite arithmétique)* Calculer la série dont le terme général est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a + rn$, où $(a, r) \in \mathbb{C}^2$.
5. La série de terme général $\frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ n'admet aucune formule explicite pour sa somme partielle

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

   On appelle cette série la série harmonique.

Remarque 3 : Il est toujours possible de définir une suite uniquement à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Par exemple la série de terme général $\frac{1}{\ln(n)}$ n'est défini qu'à partir du rang 2 :

$$\forall n \geqslant 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(n)}.$$

Remarque 4 : Une série étant une suite, tous les résultats sur les suites vus au chapitre XV peuvent s'appliquer à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Attention cependant à ne pas confondre le comportement de la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le comportement de la **série** $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple 5 : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{-1}{n}$. Déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Que peut-on dire de la monotonie de la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général u_n ?

Définition I.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge** si et seulement si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La limite est appelée alors **la somme de la série** et est notée par

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque 6 :

1. Etudier la nature d'une série c'est déterminer si elle est ou convergente. Une série divergente pour diverger vers $+\infty$, diverger vers $-\infty$ ou diverger bizarrement.
2. - On ajoute une nouvelle notation pour la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui est un réel/complexe fixé qui ne dépend d'aucune variable (la notation k est ici muette) et ne doit pas être confondu avec la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
3. Puisque la somme est une limite, il absolument INTERDIT d'écrire la somme d'une série $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$ avant d'avoir justifié au préalable l'existence de la limite i.e. la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple 7 :

1. La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général n diverge vers $+\infty$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Et donc
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$
2. La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge vers . En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$
Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ est convergente et
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$
3. La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $(-1)^n$ admet deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes $S_{2n} = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $S_{2n+1} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ est divergente.

Proposition I.3

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = b_n$. Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ ont même nature.

Démonstration. Posons pour tout $n \geqslant 0$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ les sommes partielles des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ respectivement. Alors pour tout $n \geqslant n_0 + 1$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n_0} b_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k = B_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k.$$

Or pour tout $k \geqslant n_0 + 1$, $b_k = a_k$, donc pour tout $n \geqslant n_0 + 1$,

$$B_n = B_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = B_{n_0} + A_n - A_{n_0}.$$

De cette égalité, on en déduit que les SUITES $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même comportement asymptotique : $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sont de même nature. □

Remarque 8 : Attention ! Ce n'est pas parce que deux séries ont le même terme général à partir d'un certain rang que leurs sommes coïncident. Par exemple si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{-n}$ alors on a vu que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente et de somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 2.$$

Posons pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = u_n = 2^{-n}$ et $v_0 = 10$. Par la proposition précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ a même nature que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et converge donc. Cependant,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = v_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - u_0 = 10 + 2 - 1 = 11,$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Définition I.4

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une série numérique. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ est aussi une suite convergente et sa somme est alors donnée par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Le terme R_n est appelé **le reste** d'ordre n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Proposition I.5

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une série numérique. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa somme partielle d'ordre n, R_n son reste d'ordre n et S sa somme.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$ i.e.
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$
2. La suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \geqslant n+1$, on a
$$S_p = \sum_{k=0}^{p} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{p} u_k = S_n + \sum_{k=n+1}^{p} u_k.$$
Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, par définition la suite $(S_p)_{p\geqslant n+1}$ converge vers la somme S. On retrouve que $\left(\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right)_{p\geqslant n+1}$ converge également et par définition, tend vers le reste R_n. De plus par passage à la limite quand p tend $+\infty$, on obtient bien que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S = S_n + R_n.$$
2. Du point précédent, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$. Or la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et S étant sa somme on sait que $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$. Donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et par passage à la limite :
$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} (S - S_n) = S - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0.$$

□

Proposition I.6

Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série convergente alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n de la série. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1}.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la somme notons-la S. Par différence de deux suites convergentes, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus par passage à la limite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

Remarque 9 : Par contraposée, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

Définition I.7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **diverge grossièrement**.

Anti-Proposition I.8

ATTENTION, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ NE converge PAS FORCEMENT.

Exemple 10 : La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et pourtant la série harmonique $sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$. En effet dans le DM6, on a montré que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Proposition I.9

L'ensemble des séries convergentes forment un sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'application $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}$ est une forme linéaire de l'ensemble des séries convergentes. Autrement dit si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont deux séries convergentes alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est aussi une série convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Démonstration. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ deux scalaires. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \textit{par linéarité de la somme.}$$

La *suite* des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la combinaison linéaire de deux suites $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et par passage à la limite dans l'égalité précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

□

Anti-Proposition I.10

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ converge cela N'implique PAS que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.

Exemple 11 : On a

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-1) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 1,$$

les deux dernières sommes n'étant pas définies.

Remarque 12 : Pour obtenir l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k+\sum_{k=0}^{+\infty}v_k,$$

il faut et il suffit que deux des sommes parmi les trois existent et dans ce cas uniquement la troisième existe et l'égalité est vérifiée.

II Quelques séries usuelles

Proposition II.1 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{K}$.

1. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge si et seulement si $|q|<1$.
2. Si $|q|<1$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q}.$$

Remarque 13 : Si $|q|\geqslant 1$ alors la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ diverge grossièrement.

Démonstration. Si $|q|=1$ alors $|q|^n=1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc la suite $(|q|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et donc il en va de même de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ diverge grossièrement.
Si $|q|>1$, de même $|q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ diverge grossièrement.
Si $|q|<1$. On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a la somme partielle donnée par

$$\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Or puisque $|q|<1$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}=0$. Donc la suite des sommes partielles converge vers $\frac{1}{1-q}$. Par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q}.$$

□

Proposition II.2 (Séries télescopiques)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. Alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_{n+1}-a_n)$, dite télescopique, converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge et en cas de convergence, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1}-a_k)=\lim_{n\to+\infty} a_n-a_0.$$

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}$. La somme partielle étant une somme (finie !) télescopique, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_{n+1}-a_n)$ converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en cas de convergence par passage à la limite, on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1}-a_k)=\lim_{n\to+\infty} a_n-a_0.$$

□

Exemple 14 : Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Proposition II.3 (comparaison série-intégrale)

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et f $[0;+\infty[$ une fonction continue. On suppose que f est décroissante. Alors pour tout $(q,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geqslant q \geqslant a+1$, on a

$$\int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k) \leqslant \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant a$. Puisque f est décroissante sur $[a;+\infty[$, elle l'est également sur $[k;k+1]$ et donc pour tout $t \in [k;k+1]$,

$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$

En intégrant cette inégalité sur $[k;k+1]$, on a par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & f(k+1)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \end{aligned} \tag{$\bigstar$}$$

D'une part, en sommant cette inégalité avec $p \geqslant q \geqslant a+1$, on trouve

$$\sum_{k=q}^{p} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k).$$

Par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=q}^{p} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=q}^{p} \left(\int_a^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

On reconnait alors une somme télescopique et alors

$$\sum_{k=q}^{p} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{q} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k).$$

D'autre part, en sommant $(\bigstar)$ avec $p-1 \geqslant q-1 \geqslant a$, on trouve également de la même façon,

$$\sum_{k=q-1}^{p-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=q-1}^{p-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement d'indice $\tilde{k} = k+1$ on obtient,

$$\sum_{k=q}^{p} f(k) \leqslant \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion, pour tout $p \geqslant q \geqslant a-1$,

$$\int_q^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=q}^{p} f(k) \leqslant \int_{q-1}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Remarque 15 :

- La proposition peut être adaptée sur les bornes, il est surtout important de retenir le principe et de pouvoir retrouver les inégalités rapidement sur un schéma.
- On peut également énoncer une propriété analogue lorsque f est continue et croissante.

Exemple 16 : Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge et déterminer un équivalent simple de ses sommes partielles.

Proposition II.4 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Si $\alpha < 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
Si $\alpha = 0$, $\frac{1}{n^\alpha} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et la série diverge grossièrement.
Supposons $\alpha > 0$. alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par comparaison série-intégrale, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^n f(k) \leqslant \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leqslant \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Si $\alpha \neq 1$, on obtient pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{t=1}^{t=n} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{t=2}^{t=n+1} \mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad &\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + 1 \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1 \end{aligned}$$

Si $\alpha < 1$, alors $\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par le théorème de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = +\infty,$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge. Mieux : on peut en donner un équivalent car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1\right) = 1.$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1,$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1-\alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1 = \frac{\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\alpha-1} + 1 \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)2^{\alpha-1}} + 1$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Or cette suite est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$ donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Il nous reste à traiter le cas $\alpha = 1$. En reprenant l'inégalité

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leqslant \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

on obtient que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leqslant \ln(n+1) - \ln(2).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc par le théorème de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Mieux, on peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(2)+1}{\ln(n)} = 1$ et donc par encadrement que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

La série harmonique diverge vers $+\infty$ a une vitesse logarithmique.

□

III Séries à termes positifs

Proposition III.1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série **à termes positifs** i.e. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une suite croissante. Ainsi,

1. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est majorée et alors converge.
2. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ n'est pas majorée et diverge alors vers $+\infty$.

Démonstration. Les points 1 et 2 découle de la croissance de la série et du théorème de convergence monotone. Il nous faut donc juste montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est croissante. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n la somme partielle d'ordre n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}.$$

Or par hypothèse $u_n \geqslant 0$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} \geqslant S_n$ ce qui démontre bien que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est croissante.

□

Remarque 17 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être positive à partir d'un certain rang seulement. Dans ce cas, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est croissante à partir d'un certain rang et les points 1 et 2 restent vrais.

Théorème III.2 (Théorème de comparaison)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Alors

1. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et de plus
$$0 \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$
2. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également.

Démonstration.

1. Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge et notons $S_v = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ sa somme. Par hypothèse on a pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant 0$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est croissante à partir de n_0 (Proposition III.1). Donc par monotonie, on en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant S_v.$$
Or pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, on a $u_k \leqslant v_k$. Donc pour tout $n \geqslant n_0+1$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n_0} v_k \leqslant S_v + \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k).$$
Les réels S_v et $\sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k)$ étant indépendant de n, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est majorée. Or cette série est à termes positifs à partir de n_0. Donc d'après la proposition III.1, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k.$$
Donc par passage à la limite,
$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$
2. Supposons maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. Pour tout $k \geqslant n_0$ on a $u_k \geqslant 0$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes positifs à partir du rang n_0. Donc par la proposition III.1 elle diverge vers $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k.$$
Donc par le théorème de minoration des suites, on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)_{n\geqslant n_0}$ diverge vers $+\infty$ et ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également vers $+\infty$.

$\square$

Anti-Proposition III.3

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k,$$
1. si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors cela N'implique PAS en général que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge !
2. De même si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge alors cela N'implique PAS en généra que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge !

En conséquence il est absolument vital de vérifier rigoureusement les hypothèses du théorème de comparaison (sans sommer l'inégalité !) et d'invoquer le théorème en question avant de conclure.

Exemple 18 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (-1)^{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$ ou 1 (suivant la parité de n) et par positivité de son terme général $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est croissante et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} v_k \geqslant \frac{1}{1^2} = 1$. Ainsi pour tout
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k,$$
et pourtant $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_k$ diverge !

Exemple 19 :
1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^{n^2}$ pour tout $q \in \mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\ln(n)}$ à l'aide de la série harmonique.

Proposition III.4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. Si
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$
alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n.$$

Donc si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, l'inégalité de droite implique par le théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Réciproquement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, l'inégalité de gauche implique par le théorème de comparaison des séries à termes positifs que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. $\square$

Remarque 20 : Rappelons que si deux séries ont la même nature, la convergence de l'une implique la convergence de l'autre mais l'égalité des sommes n'est pas vérifiée en général.

Exemple 21 :

1. Donner la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
2. Donner la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Rappel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. Alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée par** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n),$$

si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée i.e. il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M.$$

Proposition III.5

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **à termes positifs**. Si

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$$

et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant \frac{u_n}{v_n} = \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (M v_n)$ converge également. Donc par le théorème de comparaison, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. $\square$

Remarque 22 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à termes positifs, si

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n),$$

et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ et par ce qui précède, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Exemple 23 : Etudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathrm{e}^{-n^2}$.

IV Convergence absolue

Cette partie est une partie du programme de PT mais très abordable en première année.

Définition IV.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge absolument** si et seulement si la série des valeurs absolues ou modules $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

Proposition IV.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_n| - u_n \leqslant 2\,|u_n|\,.$$

Or par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (|u_n| - u_n)$ converge. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$ et donc en tant que différence de deux séries convergentes, on ne déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
Traitons maintenant le cas plus général, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |\mathrm{Re}\,(u_n)| \leqslant |u_n|\,.$$

Or par hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge, donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{Re}\,(u_n)|$ i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}\,(u_n)$ est une série à termes réels qui converge absolument. Donc d'après la première partie de la démonstration, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}\,(u_n)$ converge simplement. De la même façon, on montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\,(u_n)$ converge. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Re}\,(u_n) + i\mathrm{Im}\,(u_n)$ donc par combinaison linéaire de séries convergentes, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. □

Remarque 24 :

1. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ étant à termes positifs, on pourra utiliser la section précédente pour établir sa convergence.
2. Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente, l'exemple ci-dessous en est une illustration.

Exemple 25 : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $A_n = S_{2n}$ et $B_n = S_{2n+1}$.

1. Justifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes.
3. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Proposition IV.3

L'ensemble des séries à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui convergent absolument est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries qui convergent.

Démonstration. Soit E l'ensemble des séries qui convergent et F l'ensemble des séries qui convergent absolument.

- Par la proposition IV.2, on a vu que $F \subseteq E$. On aurait aussi pu dire que F était un sous-espace vectoriels de l'ensemble des suites de façon plus générale.
- La suite nulle converge bien absolument donc $0_E \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(U, V) \in F^2$. Posons $U = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $V = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Alors par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant |\lambda\, u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|\,.$$
Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$ car par hypothèse, $U \in F$ et $V \in F$ sont absolument convergentes. Donc par combinaison linéaire de deux séries convergentes, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda\, u_n + \mu v_n|$ converge i.e. que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\, u_n + \mu v_n$ converge absolument. Donc $\lambda\, U + \mu V \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, F est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Proposition IV.4 (Inégalité triangulaire pour les séries)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. On a alors

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

Démonstration. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. D'après la proposition IV.2 la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Donc les sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ existent. Ce point parait anodin mais il est vital pour que la proposition ci-dessus ait un sens ! De plus par l'inégalité triangulaire, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,.$$

Donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, et par continuité de la valeur absolue,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} |u_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\,.$$

□

Proposition IV.5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite **à termes strictement positifs**. Si

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n)\,,$$

et si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.

Démonstration. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(a_n)$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|\frac{u_n}{a_n}\right| = \frac{|u_n|}{a_n} \leqslant M.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_n| \leqslant M a_n.$$

Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} M a_n$ converge donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument et en particulier (proposition IV.2) que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. □

Remarque 26 : Cette proposition recouvre entièrement (et est donc plus générale) la proposition III.5.