Chapitre XXII : Probabilités

I Espace probabilisé

Définition I.1

On appelle
- **univers** tout ensemble non vide, souvent noté Ω,
- **évènement** tout sous-ensemble A de l'univers Ω, si $A \subseteq \Omega$, A est un évènement de Ω.
- **évènement élémentaire** tout singleton de l'univers Ω, i.e. tout sous-ensemble de Ω contenant un seul élément de Ω : pour tout $a \in \Omega$, $\{a\}$ est un évènement élémentaire,
- **issue** ou **réalisation** tout élément de Ω, si $\omega \in \Omega$, ω est une issue de Ω.

Exemple 1 : Si l'univers est $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, c, d\}$ est un évènement de Ω, $\{c\}$ est un évènement élémentaire de Ω et b ou d sont des issues de Ω.

Remarque 2 : Les chapitres sur les probabilités sont (avec le dénombrement) pratiquement les seuls chapitres en prépa dans lesquels les exercices sont contextualisés (je pencherais pour une explication historique, les probabilités sont récents dans l'enseignement). De ce fait, il sera attendu que vous soyez capable de formaliser l'énoncer, de déterminant l'univers, de noter les évènements en questions puis de calculer leurs probabilités.

Exemple 3 :
1. On lance un dé à six faces. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
2. On lance deux dés l'un rouge et l'autre vert. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ? Quel est l'évènement réalisant un double 5 ? Quel est l'évènement réalisant le fait que la somme des deux dés vaut 8 ?
3. On lance deux dés indiscernables. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ? Quel est l'évènement A réalisant le fait que la somme des deux dés vaut 4 ?
4. Dans un jeu de 32 on tire 8 cartes pour faire un main. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
5. Dans une urne comprenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on tire successivement et sans remise trois boules. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
6. On lance une pièce jusqu'à obtenir pile. On note alors le nombre de lancés effectués. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?
7. On lance une flèche dans un cible de rayon 1. On note alors les coordonnées de la flèche. Quel est l'univers ? Quel est son cardinal ?

Remarque 4 : On dit qu'un évènement A est réalisé si lors de l'expérience aléatoire, le résultat obtenu est une issue de l'évènement A. Exemple : on lance deux dés indiscernables et on note A l'évènement « la somme des dés vaut 4 ». Lors d'un lancé, on obtient 1 et 3. L'évènement A est réalisé lors de ce lancé.

Exemple 5 :
1. On lance un dé rouge et un dé vert. Obtenir un trois rouge et un six vert est un évènement élémentaire.
2. On effectue un tirage simultané de quatre cartes dans un jeu de 32 cartes. Obtenir un carré de rois est un évènement élémentaire.

Remarque 6 : Tout évènement est une union (finie si l'évènement est fini et infini sinon) d'évènements élémentaires.

Définition I.2

Soit Ω un univers. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements.
- On dit que $C_\Omega(A) = \overline{A}$, le complémentaire de A dans Ω, est l'évènement **contraire** de A.
- On dit que l'évènement A **implique** l'évènement B si et seulement si $A \subseteq B$.
- L'évènement « A et B » désigne l'évènement $A \cap B$.
- L'évènement « A ou B » désigne l'évènement $A \cup B$.

Définition I.3

Soit Ω un univers **fini**. On appelle **probabilité** toute application $\mathbb{P}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ telle que

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. pour tout couple d'évènements disjoints, $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Définition I.4

On appelle **ensemble** ou **espace probabilisé** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Remarque 7 :

- Une probabilité est parfois notée juste P.
- Notez que par définition, pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Exemple 8 : On pose $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ définie en extension par :

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(\{1,2\}) = \mathbb{P}(\{1,3\}) = \mathbb{P}(\{2,3\}) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

On peut alors vérifier que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. Par exemple

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \mathbb{P}(\{1,2\})$$

ou encore

$$\mathbb{P}(\{2,3\}) + \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 = \mathbb{P}(\{1,2,3\}) = \mathbb{P}(\Omega).$$

Cette probabilité correspond à un tirage aléatoire équiprobable (avec même probabilité pour toutes les issues) dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exemple 9 : Dans une urne, on dispose de 3 boules noires et de 2 boules blanches. On tire au hasard une boule. Déterminer Ω l'univers et $\mathbb{P}$ la probabilité associée.

Définition I.5

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements.

- On dit que A est un évènement **certain** si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 1$.
- On dit que A est un évènement **impossible** ou **négligeable** si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B$ est impossible. Autrement dit si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Remarque 10 : L'évènement Ω est toujours certain (par définition d'une probabilité) et l'évènement $\emptyset$ est toujours impossible en effet puisque $\Omega = \Omega \sqcup \emptyset$, on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \sqcup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \mathbb{P}(\emptyset).$$

On en déduit donc bien que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Remarque 11 : Vous verrez dans certains manuels de façon implicite que Ω est le seul évènement certain, que $\emptyset$ est le seul évènement impossible que deux évènements sont incompatibles si et seulement si leur intersection est vide et donc si et seulement s'ils sont disjoints. Formellement ce n'est pas tout à fait exact car l'on peut toujours augmenter son univers d'évènements impossibles sans pour autant « changer fondamentalement » la probabilité associée. Exemple : on modélise le lancer d'un dé équilibré à six faces par l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et on pose $\mathbb{P}$ la probabilité définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } \omega \neq 7 \\ 0 & \text{si } \omega = 7. \end{cases}$$

Nous verrons plus loin que ces valeurs de $\mathbb{P}$ permettent de définir entièrement $\mathbb{P}$ comme une probabilité. Notez que dans cette définition, l'évènement A « obtenir 7 » i.e. $A = \{7\}$ est un évènement impossible. De même les évènements $B = \{3, 7\}$ et $C = \{4, 5, 6, 7\}$ sont incompatibles mais non disjoints car $B \cap C = A \neq \emptyset$ mais $\mathbb{P}(A) = 0$. Vous n'avez pas compris ? Ce n'est pas très important car dans le cas des ensembles finis (programme de PTSI) un problème bien posé, on adopte toujours un univers optimal i.e. sans issue impossible. A moins d'être tordu, on définira pour le lancé d'un dé à six faces l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Mais dans un cadre plus vaste (hors programme) notamment lorsque Ω est un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$, les négligeables ont une importance non négligeable... Notez enfin que les définitions ci-dessus dépendent de la probabilité choisie.

Remarque 12 : Si deux ensembles sont disjoints, alors il sont incompatibles. En particulier A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Démonstration. Soient A et B deux ensembles disjoints. Alors $A \cap B = \emptyset$. Or nous avons vu dans la remarque **??** que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et donc A et B sont incompatibles. $\square$

Exemple 13 : On lance deux pièces distinctes ayant chacune un côté pile P et un côté face F. L'univers associé à l'expérience est alors $\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ où par exemple (P,F) désigne le fait d'avoir obtenu pile avec la pièce 1 et face avec la pièce 2. On considère les évènements suivants :

- A : « on obtient face avec la première pièce ».
- B : « on obtient pile avec les deux pièces ».
- C : « le résultat des deux pièces est identiques ».

Déterminer A, B et C puis vérifier

1. que B est un évènement élémentaire,
2. que B implique C,
3. que A et B sont incompatibles.
4. Déterminer $\overline{A}$ et l'énoncer en français.

II Calculer la probabilité d'un évènement

Proposition II.1

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements de Ω. On a

1. L'évènement $\emptyset$ est impossible $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Si A implique B, i.e. $A \subseteq B$ alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
6. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_p$ une famille d'évènements disjoints deux à deux i.e. pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque 14 :

- Si deux évènements A et B sont incompatibles alors d'après le point 5, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- On peut remplacer le dernier point par un résultat plus général : soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_p$ une famille d'évènements **incompatibles** deux à deux i.e. pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration.

1. Déjà vu cf remarque **??**.

2. On a $\Omega = A \sqcup \overline{A}$. Donc par définition d'une probabilité et puisque A et $\overline{A}$ sont disjoints, on a
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(A \sqcup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right).$$
Par conséquent,
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
3. On a $A = \left(A \cap \overline{B}\right) \sqcup (A \cap B) = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$. Donc puisque $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints, par définition de la probabilité,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \setminus B) \sqcup (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B).$$
On en déduit que
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
4. Si $A \subseteq B$ alors $B = (B \setminus A) \sqcup A$. Les évènements $B \setminus A$ et A étant disjoints, par définition de $\mathbb{P}$, on a
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A).$$
Donc
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \setminus A).$$
Or $\mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$. D'où
$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$
5. On a $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, donc
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B).$$
Donc par le point 3,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
6. On effectue une récurrence immédiate sur p.

$\square$

Proposition II.2

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement de Ω. Notons $p = \text{Card}\ (A)$ et $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ les éléments/issues de A. Alors
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(\{a_i\}).$$

Démonstration. On pose pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $A_i = \{a_i\}$. Les évènements $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ étant disjoints deux à deux, on déduit du point 6 de la proposition précédente que
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{a_i\}).$$

$\square$

Définition II.3

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \dots, A_p) \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements de Ω. On dit que $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ forme un **système complet d'évènements incompatibles** si et seulement si

1. les évènements $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ sont deux à deux incompatibles : pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$,
2. leur union vaut Ω : $\bigcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i = \Omega$.

Remarque 15 :

- En particulier, toute partition de Ω, i.e. toute famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ d'évènements deux à deux disjoints dont l'union vaut Ω forme un système complet d'évènements incompatibles.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors $(\{\omega_i\})_{i \in [\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles.

- Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est un évènement de Ω, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ forme un système complet d'évènements incompatibles.

Proposition II.4

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements incompatibles. On a

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Démonstration. Par la remarque **??**, on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i).$$

□

Proposition II.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini de cardinal n.

1. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, alors en posant pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$, on a
   (a) pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i \geqslant 0$,
   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Réciproquement, si $(p_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ est une famille de réels tels que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ $p_i \geqslant 0$ et telle que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Démonstration.

1. Découle directement que toute probabilité d'un évènement est positive et du fait que $(\{\omega_i\})_{i \in [\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles (cf remarque précédente).
2. *Unicité.* Soient $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ deux probabilités sur Ω telles que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$\mathbb{P}_1(\omega_i) = \mathbb{P}_2(\omega_i) = p_i.$$

Montrons alors que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ i.e. que pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ i.e. $A \subseteq \Omega$. Il existe $J \subseteq [\![1;n]\!]$ tel que $A = \{\omega_j \mid j \in J\}$. D'après la proposition **??**, on a alors

$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}_1(\{\omega_j\}) = \sum_{j \in J} p_j = \sum_{j \in J} \mathbb{P}_2(\{\omega_j\}) = \mathbb{P}_2(A).$$

Existence. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, il existe $J \subseteq [\![1;n]\!]$ tel que $A = \{\omega_j \mid j \in J\}$. On pose alors par définition

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in J} p_j.$$

L'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est alors bien définie (l'écriture des éléments de A étant unique, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'image de A par $\mathbb{P}$). Montrons que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

- Soit $A = \{\omega_j \mid j \in J\} \in \mathscr{P}(\Omega)$. Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a $p_i \geqslant 0$. Donc pour tout , on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in J} \underbrace{p_j}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

De plus, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc

$$1 = \sum_{j \in J} p_j + \underbrace{\sum_{i \in [\![1;n]\!] \setminus J} p_i}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{j \in J} p_j = \mathbb{P}(A).$$

Donc on a montré que pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) \in [0;1]$, donc $\mathbb{P}$ est bien à valeurs dans $[0;1]$.

- Par définition de $\mathbb{P}$ et par hypothèse sur la famille $(p_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

- Soient $A = \{\omega_j \mid j \in J\} \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B = \{\omega_k \mid k \in K\} \in \mathscr{P}(\Omega)$. On suppose que $A \cap B = \emptyset$ alors $J \cap K = \emptyset$ (vérification laissée au lecteur/lectrice) et donc $A \sqcup B = \{\omega_l \mid l \in J \sqcup K\}$. Donc par définition de $\mathbb{P}$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \sum_{l\in J\sqcup K} p_l = \sum_{j\in J} p_j + \sum_{k\in K} p_k = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

□

Remarque 16 : Ce résultat très important vous dit que pour connaitre ou définir une probabilité, il suffit de connaitre les probabilités des issues de l'univers puis d'appliquer la proposition **??** pour en déduire la probabilité d'un évènement quelconque.

Exemple 17 : On tire une boule dans une urnes en contenant 3, numérotées de 1 à 3. On suppose que chaque boule à autant de chance d'être tirée. Quel est l'univers ? Quelle est la probabilité d'une issue ? Quelle est la probabilité de l'évènement A « tirer la boule 1 ou la boule 2 » ?

Définition II.6

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On note $n = \text{Card}(\Omega)$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. On dit que l'expérience est **équiprobable** si et seulement si pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

On dit alors que $\mathbb{P}$ est la **probabilité uniforme** sur Ω.

Remarque 18 : Par la proposition **??**, la probabilité uniforme existe bien et est unique.

Proposition II.7

Soient Ω un univers fini et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement de Ω. On a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Remarque 19 : On retrouve la formule que vous devez bien connaitre : nombre de cas favorables sur le nombre de cas total.

Démonstration. Posons $n = \text{Card}(\Omega)$. Alors par définition de $\mathbb{P}$, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Notons $p = \text{Card}(A)$ et $A = \{a_1, \dots, a_p\}$. Par la proposition **??**, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n} = \frac{p}{n} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

□

Exemple 20 :

1. On lance un dé à 6 faces équilibré. On note A l'évènement « le nombre est pair ». Calculer la probabilité de A.
2. On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois coeurs puis la probabilité d'obtenir au moins un valet.

III Probabilités conditionnelles

Définition III.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement non négligeable de Ω, $\mathbb{P}(B) > 0$. Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. On appelle **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B, notée $\mathbb{P}_B(A)$ ou encore $\mathbb{P}(A \mid B)$ le réel défini par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 21 : Calculer une probabilité conditionnelle revient à changer d'univers. On *sait* que B est réalisé. Les issues possibles sont donc uniquement des issues de B. Donc parmi les issues de A seules les issues qui sont aussi dans B ne sont pas impossibles/négligeables. On considère donc $A \cap B$ et l'on renormalise sa probabilité en divisant par le poids total de l'univers qui est ici B pour obtenir un nombre entre 0 et 1.

Proposition III.2

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, un évènement non négligeable de Ω, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application

$$\mathbb{P}_B : \quad \begin{aligned} \mathscr{P}(\Omega) &\to [0;1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \end{aligned}$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration.

- Il est clair que $\mathbb{P}_B$ est bien définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$. De plus pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $A \cap B \subseteq B$. Donc

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$$

  et donc en divisant par $\mathbb{P}(B)$ qui est strictement positif, on en déduit que $\mathbb{P}_B(A) \in [0;1]$. Donc l'application $\mathbb{P}_B$ est bien à valeurs dans $[0;1]$.
- On a

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

- Enfin, pour tout couple $(A_1, A_2) \in \mathscr{P}(\Omega)$ d'évènements disjoints de Ω, $A_1 \cap A_2$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B(A_1 \sqcup A_2) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \sqcup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \sqcup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} && \text{car } \mathbb{P} \text{ est une probabilité} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2). \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité sur Ω.

□

Remarque 22 : Puisque $\mathscr{P}(B) = \{ A \cap B \mid A \in \mathscr{P}(\Omega) \}$, il est facile de vérifier que la restriction de $\mathbb{P}_B$ sur l'ensemble B :

$$P_B = \mathbb{P}_{B|_{\mathscr{P}(B)}} : \quad \begin{aligned} \mathscr{P}(B) &\to [0;1] \\ A &\mapsto \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}, \end{aligned}$$

définie une probabilité mais sur B.

Exemple 23 : On lance un dé équilibré à six faces. Calculer la probabilité d'obtenir un 6 sachant que le résultat est un nombre pair.

Proposition III.3 (Formule des probabilités composées)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B).$$
2. Pour tout $p \geqslant 2$, et toute famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i\right) \neq 0$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_p \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1})& \\ \times \mathbb{P}(A_{p-1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1)&.\end{aligned}$$

Démonstration.

1. C'est une simple conséquence de la définition $\mathbb{P}(A \mid B)$.
2. On procède par récurrence sur p. Si $p = 2$ la formule est vérifie d'après le premier point.
   Soit $p \geqslant 2$. Supposons que le formule est vérifiée pour p. Montrons-là pour $p+1$. Soit $(A_i)_{i \in [\![1;p+1]\!]}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) \neq 0$. On pose $B = \bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} A_i$, on a donc $\mathbb{P}(B) \neq 0$, donc par le premier point, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;p+1]\!]} A_i\right) = \mathbb{P}(A_{p+1} \cap B) = \mathbb{P}(A_{p+1} \mid B)\,\mathbb{P}(B).$$
   Puisque $B = \bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} A_i \subseteq \bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i$, on en déduit que par croissance de $\mathbb{P}$ que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i\right) \geqslant \mathbb{P}(B) > 0.$$
   Donc par hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$,
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(A_p \,\middle|\, \bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i\right) \ldots \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1).$$
   Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;p+1]\!]} A_i\right) &= \mathbb{P}(A_{p+1} \mid B)\,\mathbb{P}\left(A_p \,\middle|\, \bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i\right) \ldots \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1) \\ &= \mathbb{P}\left(A_{p+1} \,\middle|\, \bigcap_{i \in [\![1;p]\!]} A_i\right) \mathbb{P}\left(A_p \,\middle|\, \bigcap_{i \in [\![1;p-1]\!]} A_i\right) \ldots \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1)\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 24 :

1. On tire successivement et sans remise des boules dans une urne qui en contient initialement 5 blanches et 4 rouges. Déterminer la probabilité que la première boule rouge tirée le soit au troisième tirage.
2. Doudou le hamster a quatre activités dans sa vie : il dors, il mange, il trotte dans sa roue ou... il ne fait absolument rien (immobile le regard vide). Toutes les heures, Doudou change d'activité et en choisit une autre de façon équiprobable. On suppose qu'à l'instant initial Doudou dors. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité pour que Doudou retourne pour la première fois dormir au temps $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition III.4 (Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(B_k)_{k\in[\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements incompatibles. On a pour tout $A \in (\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k).$$

Si de plus pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on a $\mathbb{P}(B_k) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\,\mathbb{P}(B_k).$$

Démonstration. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on pose $A_k = A \cap B_k$. Alors puisque les B_k sont incompatibles deux à deux, on a, pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A \cap B_i \cap B_j) \leqslant \mathbb{P}(B_i \cap B_j) = 0.$$

Donc $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ et donc les A_k sont deux à deux incompatibles. De plus puisque $(B_k)_{k\in[\![1;p]\!]}$ forme un système complet, on a

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} B_k\right) = \bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} (A \cap B_k) = \bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} A_k.$$

Donc par la remarque **??**, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in[\![1;p]\!]} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k).$$

Si de plus pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\mathbb{P}(B_k) \neq 0$, alors pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $\mathbb{P}(A \cap B_k) = \mathbb{P}(A \mid B_k)\,\mathbb{P}(B_k)$ d'après la formule des probabilités composées ce qui implique bien que

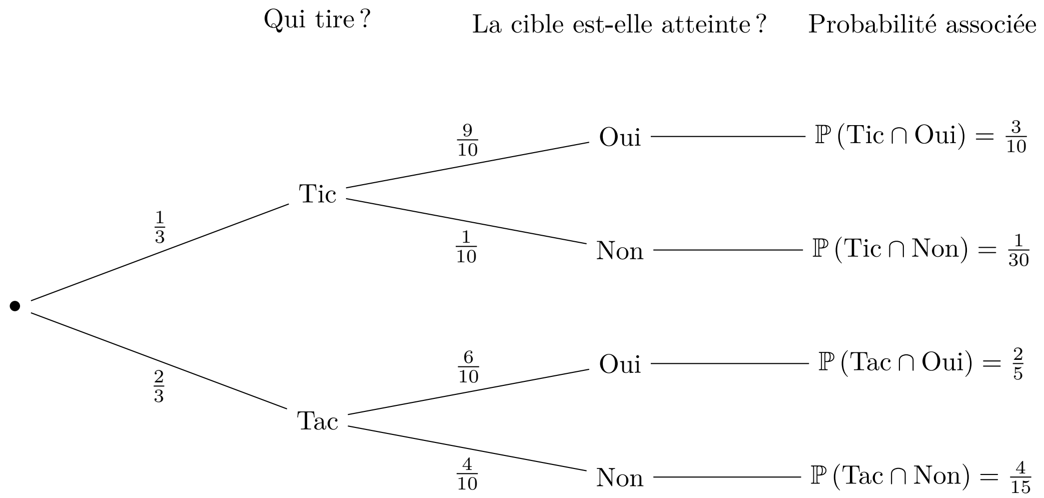
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\,\mathbb{P}(B_k).$$

□

Remarque 25 : Si $B \in \mathscr{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset, \Omega\}$ alors, on a pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right).$$

Exemple 26 : Tic et Tac tirent sur une cible. Tic touche la cible 9 fois sur 10, Tac touche la cible 6 fois sur 10. Pour chaque tire, ils choisissent au hasard qui va tirer. Sachant que Tac a deux chances sur trois d'être le tireur, quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?
Il est possible de visualiser une expérience à l'aide d'un arbre mais cela ne constitue pas une justification et cela ne peut JAMAIS se substituer à un calcul rigoureux de probabilité.



Proposition III.5 (Formule de Bayes)

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement non négligeable, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

1. Si A un évènement non négligeable $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
2. Si $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(E)^p$ est une famille complète d'évènements incompatibles, alors pour tout $i_0 \in [\![1;p]\!]$,
$$\mathbb{P}(A_{i_0} \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_{i_0})\mathbb{P}(A_{i_0})}{\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Exemple 27 :

1. Dans le jeu de Tic et Tac, on sait que la cible a été atteinte. Déterminer la probabilité pour ce soit Tac.
2. Pour une maladie affectant une personne sur mille, on dispose d'un test de dépistage qui détecte à 99% la maladie parmi les personnes infectées mais qui retourne également un faux positif à $0,2\%$ parmi les personnes saines. Quelle est la probabilité qu'une personne dont le teste soit positif soit réellement malade ?

IV Indépendance

Définition IV.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements de Ω. On dit que A et B sont **indépendants** si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque 28 : Un ensemble impossible est indépendant de tous les autres ensembles. En effet, si A est impossible i.e. si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, puisque $A \cap B \subseteq$, par croissance de $\mathbb{P}$, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Anti-Proposition IV.2

- Deux ensembles non négligeables indépendants ne sont pas incompatibles.
- Mais ce qu'il faut surtout retenir c'est que la notion d'indépendance n'est pas équivalente à la notion d'incompatibilité. Deux ensembles compatibles peuvent être indépendants ou non.

Démonstration. Soient A et B deux évènements non négligeables indépendants alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Supposons A et B incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$. Donc A ou B est négligeable ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc A et B sont compatibles. □

Exemple 29 : *Winnie l'ours* et *Pigachu* lance chacun leur propre dé, *Luuuuuuuc* arbitre le jeu. On note A l'évènement « *Winnie l'ours* obtient un nombre pair » et B l'évènement « *Pigachu* obtient un nombre impair » et C l'évènement « la somme des deux dés est paire ». Alors A et B sont indépendants et compatibles et A et C sont dépendants et compatibles.

Proposition IV.3

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ deux évènements. On suppose B non négligeable, $\mathbb{P}(B) = 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Démonstration. On a
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Donc on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \qquad \text{car } \mathbb{P}(B) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

□

Définition IV.4

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que les A_i sont **deux à deux indépendants** si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, A_i est indépendant de A_j i.e.

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Définition IV.5

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que les A_i sont **mutuellement indépendants** si et seulement si pour tout $J \subseteq [\![1;p]\!]$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Anti-Proposition IV.6

- Des évènements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants.
- La réciproque est FAUSSE : des évènements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants.

Exemple 30 : On reprend l'exemple **??** et on note D l'évènement « *Winnie l'ours* et *Pigachu* obtienne la même parité ». Vérifier que A, B et D sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Proposition IV.7

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'évènements mutuellement indépendants (respectivement deux à deux indépendants). Soit $(B_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une autre famille d'évènement de Ω telle que

$$\forall i \in [\![1;p]\!], \qquad B_i = A_i \ \text{ OU } \ B_i = \overline{A_i}.$$

Alors $(B_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants (respectivement deux à deux indépendants).
En particulier pour $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow A \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons un cas particulier. On a d'une part,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

et d'autre part,

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) &\Leftrightarrow \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

□