Chapitre XXIII : Intégration

L'objectif de ce chapitre est de définir rigoureusement l'intégrale au sens de Riemann en tant que limite de fonctions en escaliers. « L'aire sous la courbe est l'aire limite de rectangles approchant la courbe ».

I Les fonctions en escalier

Définition I.1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

- On appelle **subdivision de** $[a; b]$ toute famille $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$, $n \in \mathbb{N}^*$ telle que
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
- La subdivision particulière $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ définie pour tout $i \in [\![0; n]\!]$ par $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ est appelée **subdivision à pas constant**.

Remarque 1 :

1. Si $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une subdivision à pas constant alors
$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$
2. Si $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une subdivision de $[a; b]$, alors $[a; b[= \bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]} [x_i; x_{i+1}[$ et $]a; b] = \bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]}]x_i; x_{i+1}]$.
3. Il n'y a pas bien entendu unicité de la subdivision. Une subdivision est juste une façon de découper l'intervalle $[a; b]$ en n morceaux distincts.

Définition I.2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. On dit que φ est **une fonction en escalier** si et seulement s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $(x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ telle que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, φ est constante sur $]x_i; x_{i+1}[$ i.e.
$$\forall i \in [\![0; n-1]\!],\ \exists C_i \in \mathbb{R},\ \forall x \in]x_i; x_{i+1}[, \qquad \varphi(x) = C_i.$$

Remarque 2 :

1. Une fonction en escalier est « une fonction constante par morceaux ».
2. La fonction φ reste constante sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$ mais fait ce qu'elle veut aux points x_i.
3. Si $\sigma = (x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ est une subdivision pour laquelle φ est constante sur chacun des intervalles ouverts, alors on dit que σ est adaptée à φ.
4. Pour être en escalier il faut donc l'existence d'une subdivision adaptée. Mais l'unicité d'une subdivision adaptée n'est pas garantie. A contrario, pour tout fonction en escalier, il existe une infinité de subdivisions adaptées (on peut toujours redécouper les intervalles d'une subdivision en intervalles plus petits et la fonction φ restera bien constante sur chacun des intervalles).

Définition I.3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On note $\mathscr{E}([a; b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définie sur $[a; b]$.

Remarque 3 :

1. Une fonction en escalier est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc peut prendre des valeurs négatives.
2. Une fonction φ en escalier prend au plus $2n + 1$ valeurs : n valeurs possibles pour les n intervalles $]x_i; x_{i+1}[$ et $n + 1$ valeurs aux points x_i. En particulier, φ est bornée.
3. A part les fonctions constantes sur $[a; b]$ tout entier, aucune fonction en escalier n'est continue ni a fortiori dérivable ou $\mathscr{C}^1$.

4. La fonction partie entière est une fonction en escalier sur $[a;b]$.

Proposition I.4

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ des fonctions en escalier est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$.

Démonstration. Par définition $\mathscr{E}([a,b])$ est inclus dans $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$ et il est clair que la fonction nulle sur $[a;b]$ tout entier est une fonction en escalier.
Soient φ et $\psi\in\mathscr{E}([a;b])$ deux fonctions en escalier sur $[a;b]$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ un couple de réels. Il existe $p,n\in\mathbb{N}^*$ deux entiers, $(x_i)_{i[\![0;n]\!]}$ et $(y_i)_{i\in 0;p]\!]}$ deux subdivisions adaptées respectivement à φ et ψ. On ordonne les éléments $(x_i)_{i[\![0;n]\!]}\cup(y_i)_{i\in 0;p]\!]}$ ensembles et on note

$$\begin{aligned}
z_0 &= a\\
z_1 &= \min\{x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_p\}\\
z_2 &= \min(\{x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_p\}\setminus\{z_1\})\\
z_3 &= \min(\{x_1,\dots x_n,y_1,\dots,y_p\}\setminus\{z_1,z_2\})\\
&\vdots\\
z_r &= b.
\end{aligned}$$

où $r=n+1+p+1-\text{Card}\,(i\in[\![0;n]\!]\mid\exists j\in[\![0;p]\!],\ x_i=y_j\}=n+1+p+1-\text{Card}\,(j\in[\![0;p]\!]\mid\exists i\in[\![0;n]\!],\ x_i=y_j\}$.
On vérifie alors que la subdivision $(z_i)_{i\in[\![0;r]\!]}$ est une subdivision adaptée à la fois à φ (car on a juste ajouté des éléments à la famille $(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$) et à la fois à ψ (car on a juste ajouté des éléments à la famille $(y_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$). On a donc pour tout $i\in[\![0;r-1]\!]$,

$$\exists C_i^1,C_i^2\in\mathbb{R},\ \forall x\in\,]z_i;z_{i+1}[\,,\qquad \varphi(x)=C_i^1\qquad\text{et}\qquad\psi(x)=C_i^2.$$

D'où,

$$\forall i\in[\![0;r-1]\!],\ \exists C_i=\lambda C_i^1+\mu C_i^2\in\mathbb{R},\ \forall x\in\,]z_i;z_{i+1}[\,,\qquad(\lambda\phi+\mu\psi)(x)=\lambda C_i^1+\mu C_i^2=C_i.$$

Autrement dit la fonction $\lambda\phi+\mu\psi$ est une fonction en escalier sur $[a;b]$ dont une subdivision adaptée est $(z_i)_{i\in[\![0;r]\!]}$.
Conclusion, $\mathscr{E}([a;b])$ est stable par combinaisons linéaires et forme donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a;b],\mathbb{R})$. □

Proposition I.5

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $\varphi\in\mathscr{E}([a;b])$. Pour toute subdivision $x=(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ adaptée à φ, on note

$$I_{[a;b]}(\varphi,x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i(x_{i+1}-x_i),$$

où pour tout $i\in[\![0;n-1]\!]$, c_i est l'unique valeur prise par φ sur $]x_i;x_{i+1}[$.
Alors, si x et y sont deux subdivisions adaptée à φ, on a $I_{[a;b]}(\varphi,x)=I_{[a;b]}(\varphi,y)$.

Démonstration. Soient x et y deux subdivisions d'une même fonction en escalier φ alors nécessairement x est une sous-famille de y OU y est une sous-famille de x. On dit que l'une des subdivisions est plus fine que l'autre. Par symétrie des hypothèses, on peut supposer que x est une sous-famille de y. Notons $x=(x_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$. Puisque x est une subdivision adaptée à φ, il existe $(c_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$ tel que

$$\forall i\in[\![0;n-1]\!],\ \forall x\in\,]x_i;x_{i+1}[\,,\qquad\varphi(x)=c_i.$$

Notons également $y=(y_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$. Puisque x est une sous-famille de y, il existe $p_0,p_1,p_2,\dots,p_n\in[\![0;p]\!]$ tels que pour tout $i\in[\![0;n]\!]$, $y_{p_i}=x_i$. Notamment, $p_0=0$ et $p_n=p$. Notez que

$$[\![0;p-1]\!]=\bigsqcup_{i\in[\![0;n-1]\!]}[\![p_i;p_{i+1}-1]\!]\tag{1}$$

Enfin puisque y est adaptée à φ, il existe $(\tilde{c}_j)_{j\in[\![0;p-1]\!]}$ tel que

$$\forall j\in[\![0;p-1]\!],\ \forall x\in\,]y_j;y_{j+1}[\,,\qquad\varphi(x)=\tilde{c}_i.$$

Avec ces notations, on remarque que pour $i \in [\![0;n-1]\!]$ et $j \in [\![p_i;p_{i+1}-1]\!]$, on a $]y_j;y_{j+1}[\subseteq]x_i;x_{i+1}[$ donc si $x \in]y_j;y_{j+1}[$ alors $x \in]x_i;x_{i+1}[$ et donc pour un tel x, on a $\tilde{c}_j = \varphi(x) = c_i$. On a donc montré que

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!],\ \forall j \in [\![p_i;p_{i+1}-1]\!], \qquad \tilde{c}_j = c_i. \tag{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{[a;b]}(\varphi, y) = \sum_{j=0}^{p-1} \tilde{c}_j (y_{j+1} - y_j) &\underset{(1)}{=} \sum_{j \in \bigsqcup_{i \in [\![0;n-1]\!]} [\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} \tilde{c}_j (y_{j+1} - y_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in [\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} \tilde{c}_j (y_{j+1} - y_j) \\ &\underset{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in [\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} c_i (y_{j+1} - y_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \sum_{j \in [\![p_i;p_{i+1}-1]\!]} (y_{j+1} - y_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(y_{p_{i+1}} - y_{p_i}\right) \\ &\underset{\text{déf des } p_i}{=} \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) = I_{[a;b]}(\varphi, x). \end{aligned}$$

□

Définition I.6

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$. On appelle **intégrale** l'unique réel $I_{[a;b]}(\varphi)$ tel que pour toute subdivision x adaptée à φ,

$$I_{[a;b]}(\varphi) = I_{[a;b]}(\varphi, x).$$

Remarque 4 :

1. Lorsque φ est positive, $I_{[a;b]}(\varphi)$ est l'aire sous la courbe de φ.
2. L'intégrale $I_{[a;b]}(\varphi)$ « ne voit pas » les points $(x_i, \varphi(x_i))$. Plus précisément, la valeur de l'intégrale $I_{[a;b]}(\varphi)$ ne dépend pas des valeurs prises par φ aux points x_i.

Proposition I.7

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(\varphi, \psi) \in \mathscr{E}([a;b])^2$.

1. *Linéarité.* Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ alors
$$I_{[a;b]}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda I_{[a;b]}(\varphi) + \mu I_{[a;b]}(\psi).$$
2. *Positivité/croissance.*
   (a) Si pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$ alors $I_{[a;b]}(\varphi) \geqslant 0$.
   (b) Si pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ alors $I_{[a;b]}(\varphi) \leqslant I_{[a;b]}(\psi)$.
3. *Séparation.* On suppose que pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \geqslant 0$ et que $I_{[a;b]}(\varphi) = 0$. Alors φ est nulle sur $[a;b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (les points d'une subdivision adaptée).
4. *Relation de Chasles.* Soit $c \in]a;b[$. Alors $I_{[a;c]}(\varphi) + I_{[c;b]}(\varphi) = I_{[a;b]}(\varphi)$.

Démonstration. On a vu dans la démonstration de la proposition I.4, que si φ et ψ sont deux fonctions en escalier alors il existe $x = (x_i)_{i \in [\![0;n}$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à φ et à ψ et par suite à $\lambda\varphi + \mu\psi$. Donc il existe $(c_i)_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ et $(\tilde{c}_i)_{i \in [\![0;n-1]\!]}$ deux familles de réels telles que

$$\forall i \in [\![0;n-1]\!],\ \forall x \in]x_i;x_{i+1}[, \qquad \varphi(x) = c_i \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \tilde{c}_i.$$

1. On a donc,

$$\begin{aligned}I_{[a;b]}\left(\lambda\,\varphi+\mu\psi\right)&=\sum_{i=0}^{n}\left(\lambda\,c_i+\mu\tilde{c}_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)\\&=\lambda\sum_{i=0}^{n}c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)+\mu\sum_{i=0}^{n}\tilde{c}_i\left(x_{i+1}-x_i\right)=\lambda\,I_{[a;b]}\left(\varphi\right)+\mu I_{[a;b]}\left(\psi\right).\end{aligned}$$

2. (a) Si $\varphi\geqslant 0$, alors pour tout $i\in[\![0;n-1,\ c_i\geqslant 0$ et donc

$$I_{[a;b]}\left(\varphi\right)=\sum_{i=0}^{n}\underbrace{c_i}_{\geqslant 0}\underbrace{\left(x_{i+1}-x_i\right)}_{\geqslant 0}\geqslant 0.$$

   (b) Si $\psi\geqslant\varphi$, alors $\psi-\varphi\geqslant 0$ et donc par le point précédent, $I_{[a;b]}\left(\psi-\varphi\right)\geqslant 0$ donc par linéarité $I_{[a;b]}\left(\psi\right)-I_{[a;b]}\left(\varphi\right)\geqslant 0$ i.e. $I_{[a;b]}\left(\psi\right)\geqslant I_{[a;b]}\left(\varphi\right)$.
3. Si $\varphi\geqslant 0$, alors pour tout $i\in[\![0;n-1]\!]$, $c_i\geqslant 0$ et donc $I_{[a;b]}\left(\varphi\right)=\sum_{i=0}^{n}c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$ est une somme de termes positifs qui par hypothèse vaut 0. Donc chaque terme est nul (faire par l'absurde) donc pour tout $i\in[\![0;n-1]\!]$, $c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)=0$ or $x_{i+1}>x_i$ par définition d'une subdivision, donc $c_i=0$. Donc $\forall x\in[a;b]\setminus\left\{x_0,\dots,x_n\right\},\ \varphi(x)=0$.
4. Si c n'est pas un élément de la subdivision $(x_i)_{i\in[\![0;n-1]\!]}$, on le rajoute on l'on obtient alors une nouvelle subdivision plus fine que la précédente toujours adaptée à φ. On note encore $(x_i)_{i\in 0;n-1]\!]}$ cette nouvelle subdivision et on pose $i_0\in[\![1;n-1]\!]$ l'indice tel que $x_{i_0}=c$. On a alors

$$I_{[a;b]}\left(\varphi\right)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)=\sum_{i=0}^{i_0-1}c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)+\sum_{i=i_0}^{n-1}c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)=I_{[a;c]}\left(\varphi\right)+I_{[c;b]}\left(\varphi\right).$$

□

II Construction de l'intégrale

On rappelle que l'on note $\mathscr{C}\left([a;b],\mathbb{R}\right)$ ou plus simplement $\mathscr{C}\left([a;b]\right)$ l'ensemble des fonctions définies et continue sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème II.1 (Approximation de Weierstrass)

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f\in\mathscr{C}\left([a;b]\right)$. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\varphi\in\mathscr{E}\left([a;b]\right)$ telle que

$$\forall x\in[a;b],\qquad |f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon\,.$$

Remarque 5 : Autrement dit on peut approcher toute fonction continue *uniformément* (pour tous les x en même temps) à ε-près par une fonction en escalier.

Démonstration. Ce théorème est admis sous sa formulation la plus générale donnée ci-dessus. Démontrons le résultat lorsque f n'est pas seulement continue mais $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Supposons donc $f\in\mathscr{C}^1\left([a;b]\right)$. Alors f est dérivable, de dérivée continue. Donc f' est une fonction continue sur le **segment** $[a;b]$. Donc f' est bornée sur $[a;b]$:

$$\exists M\in\mathbb{R}_+,\ \forall x\in[a;b],\qquad |f'(x)|\leqslant M.$$

Et donc par le théorème des accroissements finis, la fonction f est M-lipschitzienne. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la subdivision régulière d'ordre n de $[a;b]$: on pose

$$\forall i\in[\![0;n]\!],\qquad x_i=a+i\frac{b-a}{n}.$$

Alors on a bien $x_0=a$, $x_n=b$ et on observe que

$$\forall i\in[\![0;n-1]\!],\qquad x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n}$$

On définit alors

$$\begin{aligned}\varphi_n \quad : \quad & [a;b] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x \in [x_i; x_{i+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}\end{aligned}$$

La fonction φ_n est bien une fonction en escalier sur $[a;b]$. De plus pour tout $x \in [a;b]$, il existe $i \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i; x_{i+1}[$ et alors par le théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leqslant \sup_{z \in [x_i; x]} |f'(z)| \, |x - x_i| \,.$$

Or $x \in [x_i; x_{i+1}[$ implique que $|x - x_i| = x - x_i \leqslant x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$. De plus, $\sup_{z\in[x_i;x]} |f'(z)| \leqslant \sup_{z\in[a;b]} |f'(z)| \leqslant M$. Dès lors,

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Il est important de noter que le majorant ne dépend ni de i ni de x. Donc, on en déduit que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Maintenant puisque $\frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε !) et donc une fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{M}{n} \leqslant \varepsilon \,.$$

□

Corollaire II.2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(\varphi^-, \varphi^+) \in \mathscr{E}([a;b])^2$ deux fonctions en escalier telles que

$$\forall x \in [a;b], \qquad \varphi^-(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi^+(x) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \leqslant \varepsilon \,.$$

Remarque 6 : Autrement dit, on peut encadrer *uniformément* (pour tous les $x \in [a;b]$ en même temps) toute fonction continue par une fonction en escalier inférieure à f et une autre fonction en escalier supérieure à f.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que

$$\forall x \in [a;b], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

i.e.

$$\forall x \in [a;b], \qquad \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $\varphi^- = \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\varphi^+ = \varphi + \frac{\varepsilon}{2}$. En tant que somme (ou différence) de deux fonctions en escalier, φ^- est une fonction en escalier et de même pour φ^+ et on vérifie bien d'une part que $\varphi^- \leqslant f \leqslant \varphi^+$ et $\varphi^+ - \varphi^- = \varphi + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\varphi(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

□

Proposition II.3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors

1. L'ensemble $I^- = \left\{ I_{[a;b]}(\varphi^-) \;\middle|\; \varphi^- \in \mathscr{E}([a;b]), \varphi^- \leqslant f \right\}$ admet une borne supérieure.
2. L'ensemble $I^+ = \left\{ I_{[a;b]}(\varphi^+) \;\middle|\; \varphi^+ \in \mathscr{E}([a;b]), \varphi^+ \geqslant f \right\}$ admet une borne inférieure.
3. Les bornes des deux ensembles précédents coïncident.

Démonstration.

1. D'après le corollaire II.2, on sait qu'il existe $\varphi^- \in \mathscr{E}([a;b])$ vérifiant $\varphi^- \leqslant f$ (et même assez proche de f). Même sans ce corollaire, puisque f est continue sur $[a;b]$, alors f est minorée sur $[a;b]$ et donc il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant m$. Donc la fonction constante égale à m est une fonction en escalier inférieure à f et donc I^- est bien un ensemble non vide. Montrons qu'il est majoré. La fonction f est continue sur $[a;b]$. Donc
$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a;b], \qquad f(x) \leqslant M.$$
Donc pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$, telle que $\varphi \leqslant f$ on a $\varphi \leqslant M$ sur $[a;b]$. Or la fonction $\tilde{M}$ constante égale à M sur $[a;b]$ est aussi une fonction en escalier. Donc (et seulement parce que les deux fonctions φ et M sont en escalier), par la proposition I.7 on a
$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant I_{[a;b]}\left(\tilde{M}\right) = M\,(b-a)\,.$$
Conclusion,
$$\forall\, \varphi^- \in \mathscr{E}([a;b]) \text{ telle que } \varphi \leqslant f, \qquad \text{on a } I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant M\,(b-a)\,.$$
Le majorant étant indépendant de φ^-, on en déduit bien que I^- est majoré. Donc par un théorème du cours, l'ensemble I^- étant une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
2. Similaire au point précédent. On peut aussi considérer $-f$ et relier I^+ de f à I^- de $-f$ et utiliser le point précédent.
3. Notons $\alpha = \sup I^-$ et $\beta = \inf I^+$. Par le corollaire du théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ_ε^- et φ_ε^+ deux fonctions en escalier sur $[a;b]$ telles que
$$\varphi_\varepsilon^- \leqslant f \leqslant \varphi_\varepsilon^+ \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leqslant \varepsilon\,.$$
Les premières inégalités impliquent que $I_{[a;b]}(\varphi_\varepsilon^-) \in I^-$ et $I_{[a;b]}(\varphi_\varepsilon^+) \in I^+$. Par conséquent,
$$\alpha \geqslant I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^-\right) \qquad \text{et} \qquad \beta \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^+\right)\,.$$
Or on sait également $\varphi_\varepsilon^+ - \varphi_\varepsilon^- \leqslant \varepsilon$ donc par croissance et linéarité de $I_{[a;b]}$ sur les fonctions en escalier, on a
$$0 \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^+\right) - I_{[a;b]}\left(\varphi_\varepsilon^-\right) \leqslant \varepsilon\,(b-a)\,.$$
On obtient donc
$$0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \varepsilon\,.$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on conclut que
$$\alpha = \beta.$$

□

Définition II.4

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$ l'unique réel défini par
$$\sup I^- = \sup\left\{\, I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \mid \varphi^- \in \mathscr{E}([a;b])\,, \varphi^- \leqslant f \,\right\} = \inf I^+ = \left\{\, I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \mid \varphi^+ \in \mathscr{E}([a;b])\,, \varphi^+ \geqslant f \,\right\}.$$
On la note $\int_{[a;b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 7 : Si φ est une fonction constante : $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a;b]$, $\varphi(x) = c$. Alors $\varphi \in \mathscr{E}([a;b]) \cap \mathscr{C}([a;b])$ et on a alors dans ce cas,
$$c\,(b-a) = I_{[a;b]}\left(\varphi\right) = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

III Propriétés de l'intégrale

Proposition III.1 (Linéarité)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathscr{C}([a;b])$, $g \in \mathscr{C}([a;b])$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. L'intégrale est linéaire :
$$\int_a^b (\lambda\, f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le corollaire du théorème de Weierstrass, il existe φ^+ et φ^- deux fonctions en escalier telles que

$$\varphi^- \leqslant f \leqslant \varphi^+ \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi^+ - \varphi^- \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc par définition de l'intégrale de f,

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right).$$

Et par croissance et linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier,

$$0 \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) - I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \varepsilon\,.$$

On en déduit que

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) \leqslant \varepsilon + I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \varepsilon + \int_{[a;b]} f.$$

Puis

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \geqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) - \varepsilon \geqslant \int_{[a;b]} f - \varepsilon\,.$$

Autrement dit,

$$I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) - \varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) + \varepsilon\,. \tag{3}$$

De la même façon, il existe ψ^+ et ψ^- deux fonctions en escalier telles que

$$\psi^- \leqslant g \leqslant \psi^+ \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \psi^+ - \psi^- \leqslant \varepsilon$$

et

$$I_{[a;b]}\left(\psi^+\right) - \varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} g \leqslant I_{[a;b]}\left(\psi^-\right) + \varepsilon\,. \tag{4}$$

Supposons $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$. Alors

$$\lambda\varphi^- + \mu\psi^- \leqslant \lambda f + \mu g \leqslant \lambda\varphi^+ + \mu\psi^+$$

De plus, $\lambda\varphi^- + \mu\psi^-$ et $\lambda\varphi^+ + \mu\psi^+$ sont deux fonctions en escalier donc par définition de l'intégrale,

$$I_{[a;b]}\left(\lambda\varphi^- + \mu\psi^-\right) \leqslant \int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) \leqslant I_{[a;b]}\left(\lambda\varphi^+ + \mu\psi^+\right).$$

Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier

$$\lambda I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) + \mu I_{[a;b]}\left(\psi^-\right) \leqslant \int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) \leqslant \lambda I_{[a;b]}\left(\varphi^+\right) + \mu I_{[a;b]}\left(\psi^+\right).$$

En utilisant (3) et (4) (et le fait que $\lambda \geqslant 0$ et $\mu \geqslant 0$) on obtient alors,

$$\lambda\int_{[a;b]} f - \lambda\varepsilon + \mu\int_{[a;b]} g - \mu\varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) \leqslant \lambda\int_{[a;b]} f + \lambda\varepsilon + \mu\int_{[a;b]} g + \mu\varepsilon$$
$$\lambda\int_{[a;b]} f + \mu\int_{[a;b]} f - (\lambda+\mu)\varepsilon \leqslant \int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) \leqslant \lambda\int_{[a;b]} f + \mu\int_{[a;b]} f + (\lambda+\mu)\varepsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, que

$$\int_{[a;b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda\int_{[a;b]} f + \mu\int_{[a;b]} f.$$

Les cas où λ ou μ sont négatifs se prouvent par des calculs similaires. □

Proposition III.2 (Positivité/Croissance)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathscr{C}([a;b])$, $g \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors

1. Si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
2. Si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

1. Si $f \geqslant 0$, alors la fonction nulle $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est une fonction en escalier inférieure à f, donc par définition de l'intégrale,
$$0 = I_{[a;b]}\left(0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right) \leqslant \int_{[a;b]} (f).$$
2. Si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$ et donc par le point précédent, $\int_{[a;b]} (g-f) \geqslant 0$. Puis par linéarité de l'intégrale, $\int_{[a;b]} g - \int_{[a;b]} f \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_{[a;b]} g \geqslant \int_{[a;b]} f$.

□

Proposition III.3 (Séparation)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Si

1. pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geqslant 0$
2. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

alors pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) = 0$.

Démonstration. Procédons par l'absurde, on suppose qu'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Puisque f est positive (ou nulle) on en déduit que $f(x_0) > 0$. En posant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap [a;b]$
$$f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$
On considère alors la fonction en escalier
$$\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } x \in [x_0-\eta; x_0+\eta] \cap [a;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On vérifie alors que φ est une fonction en escalier et que pour tout $x \in [a;b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x)$. Donc par définition de l'intégrale,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant I_{[a;b]}(\varphi) = \frac{f(x_0)}{2}\left(\min(x_0+\eta, b) - \max(x_0-\eta, a)\right) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}\eta > 0.$$
Ce qui contredit l'hypothèse $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

□

Proposition III.4 (Relation de Chasles)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$, $a < c < b$, $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour toute fonction $\varphi^- \in \mathscr{E}([a;b])$ telle que $\varphi^- \leqslant f$ sur $[a;b]$, par la relation de Chasles pour les fonctions en escaliers, on a
$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) = I_{[a;c]}\left(\varphi^-\right) + I_{[c;b]}\left(\varphi^-\right).$$
Or φ^- est une fonction en escalier inférieure à f sur $[a;c]$ et sur $[b;c]$. Donc par définition de l'intégrale sur chacun de ces segments,
$$I_{[a;b]}\left(\varphi^-\right) \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Ceci étant vrai pour toute fonction φ^-, on en déduit que $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est un majorant de I^-. Par définition de la borne supérieure et de l'intégrale :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En considérant les fonctions en escalier φ^+ supérieures à f, on en déduit de la même façon que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

IV Inégalités

Proposition IV.1 (Inégalité triangulaire)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Comme f est continue, $|f|$ est aussi continue et donc $\int_a^b |f|$ a un sens. De plus $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b -|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

i.e.

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Proposition IV.2 (Inégalité de la moyenne)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b])^2$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{s\in[a;b]} |f(s)| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En particulier si g est la fonction constante égale à 1,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\,(b-a)\,.$$

Démonstration. Notez que si f et g sont continues sur $[a;b]$ alors il en est de même de fg et de $|g|$. De plus, f étant continue sur le segment $[a;b]$, sa borne supérieure existe (et est atteinte). Donc tous les objets de la proposition sont bien définis. Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Or répétons que $\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|$ existe car f est continue sur le segment $[a;b]$. De plus, pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)| \leqslant \sup_{s\in[a;b]} |f(s)|$ donc pour tout $t \in [a;b]$, $|f(t)|\,|g(t)| \leqslant \left(\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\right) |g(t)|$. Donc par croissance de l'intégrale,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left(\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\right) |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, $\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|$ est un réel fixé. Donc par linéarité de l'intégrale,

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left(\sup_{s\in[a;b]} |f(s)|\right) |g(t)|\,\mathrm{d}t = \sup_{s\in[a;b]} |f(s)| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 8 : Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie

$$m = \inf_{s\in[a;b]} f(s) \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{s\in[a;b]} f(s),$$

et est appelé la valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$.

Proposition IV.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz - Hors programme)

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, $(f,g)\in\mathscr{C}([a;b])^2$. Alors

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. La démonstration est particulièrement élégante et classique pour mériter un petit détour. On pose pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Par positivité de l'intégrale, on observe que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $P(\lambda)\geqslant 0$. De plus par linéarité de l'intégrale,

$$P(\lambda) = \lambda^2\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\lambda\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On remarque alors (les intégrales étant des réels fixés) que P est un polynômes du second degré et puisque P est positif sur $\mathbb{R}$ tout entier, on en déduit nécessairement que son discriminant est négatif :

$$\begin{aligned} & 0 \geqslant \Delta = 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - 4\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \quad & \left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Remarque 9 : Extension aux bornes inversées. Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sont deux réels tels que $a<b$, alors on définit $\int_b^a f$ par

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $a=b$ on étend également la définition de l'intégrale par

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Alors les résultats suivants peuvent s'étendre à ces nouvelles notations :

- linéarité de l'intégrale,
- séparation (avec $a\neq b$),
- relation de Chasles.

Cependant les résultats suivants sont faux lorsque les bornes ne sont pas dans l'ordre :

- positivité/croissance de l'intégrale,
- toutes les inégalités.

V Théorème Fondamental de l'Analyse

Rappels

1. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur un intervalle I si et seulement si F est dérivable et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
2. Si F et G sont deux primitives de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.
3. Si $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$, alors il existe au plus une primitive F de f sur I telle que $F(a) = A$.

Théorème V.1 (Existence d'une primitive)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}(I)$. Alors pour tout $A \in \mathbb{R}$, l'application

$$F : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.

Démonstration. Puisque f est continue sur I, pour tout $x \in I$, f est continue sur $[a;x]$ et donc l'intégrale de f sur $[a;x]$ est bien définie (que x soit plus petit ou plus grand que a) et donc F est une fonction bien définie sur I. L'unicité est garantie par le rappel précédent et par définition de l'intégrale, on a bien

$$F(a) = A + \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = A + 0 = A.$$

Il nous faut donc montrer que F est une fonction dérivable sur I et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
Echauffement. Montrons pour commencer que F est continue sur I. Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est continue en x_0 i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap I, \qquad |F(x) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Pour tout $x \in I$, on a par définition de F, puis la relation de Chasles,

$$F(x) - F(x_0) = A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \left(A + \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc, si $x \geqslant x_0$, par l'inégalité triangulaire,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \int_{x_0}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{s \in [x_0;x]} |f(s)|\,(x - x_0)\,.$$

Notamment pour tout $x \in [x_0; x_0 + 1] \cap I$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \sup_{s \in [x_0;x_0+1] \cap I} |f(s)|\,(x - x_0)\,.$$

De même, pour tout $x \in [x_0 - 1; x_0] \cap I$,

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \sup_{s \in [x_0-1;x_0] \cap I} |f(s)|\,(x_0 - x)\,.$$

En résumé, pour tout $x \in [x_0 - 1; x_0 + 1] \cap I$, en notant $M = \sup_{s \in [x_0-1;x_0+1] \cap I} |f(s)|$, on obtient

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant M\,|x - x_0|\,.$$

Autrement dit, F est M-lipschitzienne sur $[x_0 - 1; x_0 + 1] \cap I$ notamment continue : pour tout $\varepsilon \in]0;1]$, en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$, on obtient bien que pour tout $x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta]$, $|x - x_0| \leqslant \eta$, on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant M\eta \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc F est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on en déduit que F est continue sur I.

La vraie démonstration. Montrons maintenant que F est dérivable sur I et que pour tout $x_0 \in I$, $F'(x_0) = f(x_0)$. Fixons $x_0 \in I$ et posons pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$g(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0).$$

Montrons que $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. On a pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x - x_0}(F(x) - F(x_0)) - f(x_0) \times 1 \\ &= \frac{1}{x - x_0}\left(A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - A - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(x_0) \times \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x 1\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or f est continue sur I donc en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap I$, on a $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Donc pour tout $x \in [x_0; x_0 + \eta] \cap I$, si $t \in [x_0; x]$ alors $t \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap I$ et donc par l'inégalité triangulaire,

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

De même si $x \in [x_0 - \eta; x_0] \cap I$, en alternant les bornes, on montre à nouveau que $|g(x)| \leqslant \varepsilon$. De cette façon,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in [x_0 - \eta; x_0 + \eta] \cap I, \qquad |g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, par définition même de la limite,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on obtient alors que pour tout $x_0 \in I$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Conclusion, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ c'est bien ce qu'il nous restait à montrer.

□

Remarque 10 : Puisque la dérivée de F est f et que f est continue sur I, on en déduit que F est $\mathscr{C}^1$ sur I.

Théorème V.2 (Théorème Fondamental de l'Analyse)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}([a; b])$ et F UNE primitive de f sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Si F UNE primitive de f sur $[a; b]$, et que $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une autre primitive de f sur $[a; b]$ d'après le théorème précédent, on sait donc d'après le rappel précédent, qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a; b]$, $F(x) = A + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$F(b) - F(a) = A + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \left(A + \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Corollaire V.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^1(I)$ alors pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Il est très important de spécifier f $\mathscr{C}^1$ pour que f' soit continue et que donc l'intégrale de f sur $[a;b] \subseteq I$ soit bien définie. Dans ce cas, f est bien une primitive de f' sur $[a;b]$ et donc par le théorème précédent,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Exemple 11 : Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

VI Sommes de Riemann

La méthode des rectangles et l'approximation de l'intégrale par une subdivision régulière est un cas particulier de l'approche de l'intégrale de f par des fonctions en escalier. Cependant, à l'image du théorème de comparaison série-intégrale du chapitre précédent, ce lien entre somme et intégrale est utile, notamment pour calculer/approcher des sommes à l'aide d'intégrales.

Théorème VI.1 (Somme de Riemann)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a;b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$S_n^{(1)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n^{(2)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{(1)}(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n^{(2)}(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$S_n^{(1)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n^{(2)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque 12 : La notation $S_n^{(1)}(f)$ ou $S_n^{(2)}(f)$ n'est pas standard mais le terme *somme de Riemann*. Attention à ne pas confondre les *sommes* de Riemann avec les *séries* de Riemann !

Démonstration. La démonstration dans le cas générale d'une fonction continue est hors programme et admise. Montrons le résultat lorsque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. Lorsque f est $\mathscr{C}^1([a;b])$ alors f' est continue sur le segment $[a;b]$ et donc f' est bornée sur $[a;b]$. Notons $M = \sup_{z\in[a;b]} |f'(z)|$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\forall (x;y) \in [a;b]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{z\in[x;y]} |f'(z)|\,|x-y| \leqslant M\,|x-y|\,,$$

i.e. f est M-lipschitzienne sur $[a;b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ les éléments de la subdivision régulière d'ordre n de $[a;b]$. Par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,.$$

Notons que pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k)\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est M-lipschitzienne,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n^{(1)}(f)\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} M\,|t-x_k|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} x_{k+1}-x_k\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant M\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,\mathrm{d}t = M\frac{b-a}{n}\int_a^b 1\,\mathrm{d}t = M\frac{(b-a)^2}{n}\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $M(b-a)^2$ ne dépendant pas de n, on en déduit bien que

$$S_n^{(1)}(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

En particulier, $S_n^{(1)}(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On procède de même pour $S_n^{(2)}(f)$.

□

Exemple 13 : Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},$$

converge et calculer sa limite.

Remarque 14 : Attention !!! Les sommes de Riemann ne sont pas des séries car on divise chaque somme « partielle » par la variable n qui est... variable !

VII Formules de Taylor

Rappel (Taylor-Young)

Soient I un intervalle, $n\in\mathbb{N}$, $f\in\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $x_0\in I$. Pour tout $x\in I$ on a

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to x_0}{=} f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)\\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+o\left((x-x_0)^n\right).\end{aligned}$$

Théorème VII.1 (Formule de Taylor-Reste intégral)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $f\in\mathscr{C}^{n+1}(I)$ et $(a,b)\in I^2$. Alors,

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n. On fixe I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ deux réels de I. On considère alors $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$\mathscr{P}_n \qquad \text{« } \forall f \in \mathscr{C}^{n+1}(I),\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \text{ »}$$

Initialisation. Si $n=0$ alors $\mathscr{P}_0$ s'écrit

$$\forall f \in \mathscr{C}^1(I), \qquad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc par le corollaire du théorème fondamental de l'analyse, on en déduit bien que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I)$. Notamment f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Donc par hypothèse de récurrence, on sait que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{$\bigstar$}$$

Posons

$$\forall t \in [a;b], \qquad u(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puisque f est $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I, $f^{(n+1)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur I et donc u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur I et donc sur $[a;b]$. De plus

$$\forall t \in [a;b], \qquad u'(t) = f^{(n+2)}(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(a)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} - 0 + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On note que $(b-b)^{n+1}$ vaut bien 0 car $n+1 \geqslant 1$. En injectant cette formule dans ($\bigstar$), on obtient alors que

$$\begin{aligned}f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f^{(n+1)}(a)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} - 0 + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors démontrée.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.

□

Remarque 15 :

- La formule de Taylor avec reste intégral est plus précise que la formule de Taylor-Young car le reste est donné de façon explicite mais elle demande en contrepartie une régularité plus forte sur f.
- L'hypothèse $\mathscr{C}^{n+1}$ est nécessaire pour que $f^{(n+1)}$ soit continue et donc pour que l'intégrale existe.

Théorème VII.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Supposons $a < b$. Alors par le théorème de Taylor avec reste intégral,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| = \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t \right|.$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leqslant \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t$$

La fonction f étant $\mathscr{C}^{n+1}$, on en déduit que $f^{(n+1)}$ est continue sur **le segment** $[a;b]$. La fonction $f^{(n+1)}$ est donc continue et atteint ses bornes. Notons $M = \sup_{z \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right|$. Par croissance de l'intégrale,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} M \, \mathrm{d}t = M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t = M \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=a}^{t=b} = M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le cas où $b < a$ se traite de façon similaire en pensant bien à échanger les bornes de l'intégrale lorsque l'on utilise l'inégalité triangulaire.

□