Chapitre XXVI : Géométrie du plan.

Dans tout ce chapitre $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ désigne l'ensemble des **vecteurs** du plan. C'est donc une notation pour une interprétation géométrique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la loi interne $+$ et de $\cdot$ la multiplication externe par les scalaires de $\mathbb{R}$. On utilisera donc toutes nos connaissances des espaces vectoriels pour décrire $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.
On note également $\mathscr{P}$ l'ensemble des **points** du plan. Il s'agit à nouveau d'une interprétation géométrique de l'espace affine $\mathbb{R}^2$.
Aparté : soit E un espace vectoriel. On appelle alors espace affine de direction E tout espace qui peut s'écrire $\mathscr{E} = A+E = \{A+\vec{u} \mid \vec{u} \in E\}$ où A est un point fixé de $\mathscr{E}$. Notamment si $E=\mathbb{R}^2$ et $A=(0,0)$ on obtient l'espace affine simple $\mathbb{R}^2$.

I Repères cartésiens, repères polaires

Pseudo-rappel

- Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}^2$, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ tel que $\vec{u} = B - A$. On le note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- Pour tout $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, et tout $A \in \mathscr{P}$, il existe un unique point $B \in \mathscr{P}$ tel que $B = A + \vec{u}$.

Remarque 1 :

- Autrement dit pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}^2$, $B = A + \overrightarrow{AB}$.
- En conséquence, pour tout $A \in \mathscr{P}$, on a $\mathscr{P} = A + \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

Définition I.1

On appelle **repère** du plan affine $\mathscr{P}$ la donnée d'une base $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et d'un point $O \in \mathscr{P}$. On le note alors $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. O est appelé **l'origine** du repère.

Dessin :

Remarque 2 :

- Une base est l'objet efficace pour décrire l'ensemble des vecteurs d'un espace vectoriel. Un repère est son équivalent pour décrire l'ensemble des points d'un espace affine.
- En particulier si $O=(0;0)$ et si $\mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$, on obtient le repère « canonique » pour le plan affine $\mathbb{R}^2$.

Proposition I.2 (coordonnées dans un repère)

Soit $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan affine $\mathscr{P}$. Alors pour tout $M \in \mathscr{P}$, il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = O + x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple est appelé les **coordonnées** de M dans le repère $\mathscr{R}$. On note alors $M\,(x;y)$.

Démonstration. D'après le pseudo-rappel, $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Donc il existe $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

Donc toujours selon le pseudo-rappel,

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

□

Exemple 3 : Si $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $O\,(0; 0) \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{R} = (O; e_1, e_2)$ le repère « canonique » de $\mathscr{P}$. Les coordonnées de $M\,(x; y)$ dans $\mathscr{R}$, dite coordonnées cartésiennes, sont simplement (x, y).

Remarque 4 :

1. Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans une base $\mathscr{B}$, il suffit d'appliquer les formules de changements de bases vu au chapitre sur les représentations matricielles.
2. Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $(A, A') \in \mathscr{P}^2$. On note $\mathscr{R} = \left(A; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\mathscr{R}' = \left(A; \vec{i}, \vec{j}\right)$ les deux repères associés. Pour tout $M \in \mathscr{P}$, de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, on a
$$M = A + x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = A' + \overrightarrow{A'A} + x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$
On pose (x', y') les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. On a alors,
$$M = A' + (x - x')\,\vec{i} + (y - y')\,\vec{j}.$$
Avec ces notations les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}'$ sont donc $(x - x', y - y')$. Moralité pour changer l'origine d'un repère, il suffit d'effectuer une translation de vecteur $-\overrightarrow{AA'}$.
3. Pour passer d'un repère $\mathscr{R} = \left(A; \vec{i}, \vec{j}\right)$ à un repère $\mathscr{R}' = \left(A'; \vec{i}', \vec{j}'\right)$, il suffit donc de changer de base en considérant le repère $\left(A; \vec{i}', \vec{j}'\right)$ puis de changer son origine.

Exemple 5 : Soient $A\,(2, 1)$, $B\,(5, 12)$ et $C\,(1, 4)$ trois points du plan. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R} = \left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Définition I.3

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ deux vecteurs du plan. On note $(\vec{u}, \vec{v})$ la mesure de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, compté positivement si l'on tourne dans le sens trigonométrique pour aller de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ et négativement sinon.

Proposition I.4 (coordonnées polaires)

Soit $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère de $\mathscr{P}$. Pour tout $M \in \mathscr{P} \setminus \{O\}$, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que

$$M = O + r\cos(\theta)\,\vec{i} + r\sin(\theta)\,\vec{j}.$$

Les réels (r, θ) sont appelés alors **les coordonnées polaires** de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Démonstration. Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathscr{R}$. Puisque $M \neq O$, alors $(x, y) \neq (0, 0)$. Donc d'après le chapitre sur les complexes, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ où r est le module de M et θ son argument entre $[0; 2\pi[$.

□

Remarque 6 : On a alors comme dans les complexes, $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Dessin :

II Opérations sur les vecteurs

II.1 Le produit scalaire

Définition II.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E, toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ (forme sur E^2) étant

- *bilinéaire* :
  1. Pour tout $x \in E$, $\forall\,(y, y') \in E^2$, $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\langle x|\lambda\, y + \mu y'\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x|y'\rangle\,.$$
  2. Pour tout $(x, x') \in E^2$, $\forall y \in E$, $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\langle \lambda\, x + \mu x'|y\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x'|y\rangle\,.$$
- *symétrique* : $\forall\,(x, y) \in E^2$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- *positive* : $\forall x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$
- *définie* : $\forall x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \;\Rightarrow\; x = 0_E$.

Remarque 7 : Vous verrez l'année prochain qu'un espace vectoriel de dimension finie avec un produit scalaire est un espace euclidien et vous étudierez ces espaces.

Proposition II.2

Soit $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$, il existe un unique produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ vérifiant

$$\langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 0.$$

De plus le produit scalaire vérifie

$$\forall\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2, \qquad \langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle = xx' + yy'.$$

Démonstration. *Unicité.* Soit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ un produit scalaire vérifiant

$$\langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{e_2}\rangle = 0.$$

Montrons qu'il vérifie alors nécessairement

$$\forall\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2, \qquad \langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle = xx' + yy',$$

ce qui démontrera l'unicité d'une telle application.

Soit $\forall(\vec{u},\vec{v}) = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) \in \vec{\mathscr{P}}^2$. Par définition de $\vec{u}$, on a $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Donc par la linéarité à gauche du produit scalaire, on a

$$\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = \langle x\vec{e_1} + y\vec{e_2}|\vec{v}\rangle = x\langle \vec{e_1}|\vec{v}\rangle + y\langle \vec{e_2}|\vec{v}\rangle .$$

De plus, $\vec{v} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$. Donc par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = x\langle \vec{e_1}|x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}\rangle + y\langle \vec{e_2}|x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}\rangle = xx'\langle \vec{e_1}|\vec{e_1}\rangle + xy'\langle \vec{e_1}|\vec{e_2}\rangle + x'y\langle \vec{e_2}|\vec{e_1}\rangle + yy'\langle \vec{e_2}|\vec{e_2}\rangle .$$

Or par hypothèse, $\langle \vec{e_1}|\vec{e_1}\rangle = \langle \vec{e_2}|\vec{e_2}\rangle = 1$ et $\langle \vec{e_1}|\vec{e_2}\rangle = 0$. Donc

$$\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = xx' + x'y\langle \vec{e_2}|\vec{e_1}\rangle + yy'.$$

De plus, par symétrie, $\langle \vec{e_2}|\vec{e_1}\rangle = \langle \vec{e_1}|\vec{e_2}\rangle = 0$. D'où

$$\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = xx' + yy'.$$

Existence. On vérifie que l'application donnée par $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto xx' + yy'$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive. EXO !

$\square$

Exemple 8 :

1. Montrer que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $X = (x_1,\dots,x_n)$ et tout $Y = (y_1,\dots,y_n)$ par $\langle X|Y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathscr{C}([0;1]) \times \mathscr{C}([0;1]) \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(f,g) \in \mathscr{C}([0;1])^2$ par $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([0;1])$.
3. Soit $(\Omega,\mathbb{P})$. Montrer que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathscr{F}(\Omega,\mathbb{R}) \times \mathscr{F}(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(X,Y) \in \mathscr{F}(\Omega,\mathbb{R})^2$ par $\langle X|Y\rangle = \mathbb{E}(XY)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{R})$.

Définition II.3

Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = 0.$$

Exemple 9 : Les vecteurs $\vec{e_1} = (1,0)$ et $\vec{e_2} = (0,1)$ sont orthogonaux. Les vecteurs $\vec{u}(5,-8)$ et $\vec{v}(2,5/4)$ sont orthogonaux.

II.2 La norme euclidienne

Définition II.4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. On appelle norme euclidienne de E, notée $\|\cdot\|$ l'application définie par

$$\|\cdot\| \quad : \quad \begin{aligned} E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x|x\rangle}. \end{aligned}$$

Remarque 10 : Comme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire, par définition, l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est positive. Donc pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$. Donc la racine carré de $\langle x|x\rangle$ existe bien et $\|\cdot\|$ est bien définie sur E et est notamment positive.

Proposition II.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E. On a les propriétés suivantes

1. *Positivité.* Pour tout $x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$.
2. *Définie/Séparation.* Pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
3. *Pseudo-linéarité.* Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
4. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$.
5. *Pythagore* Pour tout $(x,y) \in E^2$, si x et y sont orthogonaux alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration.

1. Cf la remarque précédente.
2. Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$, alors $\sqrt{\langle x|x\rangle} = 0_{\mathbb{R}}$ i.e. $\langle x|x\rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Or $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire et donc cela implique que $x = 0_E$.
3. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x|\lambda x\rangle} &= \sqrt{\lambda \langle x|\lambda x\rangle} && \textit{par linéarité à gauche du produit scalaire}\\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x|x\rangle} && \textit{par linéarité à droite du produit scalaire}\\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x|x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|.\end{aligned}$$
4. Soit $(x, y) \in E^2$. Par bilinéarité du produit scalaire,
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle .$$
Par symétrie du produit scalaire, $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$ et donc
$$\|x+y\|^2 = \langle x|x\rangle + 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 .$$
5. Découle immédiatement de la définition de l'orthogonalité $\langle x|y\rangle = 0$ et du point précédent !

□

Proposition II.6

Soit $(x, y) \in E^2$.

1. *Identité du parallélogramme.*
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2}.$$
2. *Identité de polarisation.*
$$\langle x|y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$. Par la proposition précédente,
$$\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = \frac{\|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

□

Proposition II.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a
$$|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\| .$$

Démonstration. Soient $(x, y) \in E^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la proposition II.5,
$$\|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|ty\rangle + \|ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x|y\rangle + \|y\|^2 t^2.$$
Donc la fonction polynomiale $t \mapsto \|x\|^2 + 2t\langle x|ty\rangle + \|y\|^2 t^2$ est toujours positive sur $\mathbb{R}$ (car vaut $\|x+ty\|^2$). Son discriminant est donc négatif :
$$\Delta = (2\langle x|y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\langle x|y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x|y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 .$$
En passant à la racine carrée (et puisque les normes sont positives) on obtient la résultat voulue.

□

Proposition II.8 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a
$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$$

Démonstration. Soit $(x,y) \in E^2$, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 .$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $2\langle x|y\rangle \leqslant |2\langle x|y\rangle| \leqslant 2\|x\|\,\|y\|$. D'où,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 .$$

En passant à la racine carrée (et parce que les normes sont positives) on obtient le résultat souhaité. □

Proposition II.9

1. Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \vec{\mathscr{P}}$. On a
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$
2. Soit $(A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)) \in \mathscr{P}^2$. On a
$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}.$$

Démonstration.

1. Par définition de la norme et la proposition II.2,
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}|\vec{u}\rangle} = \sqrt{xx+yy} = \sqrt{x^2+y^2}$$
2. Puisque $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix}$, la formule se déduit du point précédent.

□

Remarque 11 : Si $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont les coordonnées polaires de M dans le repère « canonique » , alors

$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = r.$$

Définition II.10

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur **normé** ou **unitaire** si et seulement si sa norme euclidienne vaut 1 :

$$\|\vec{u}\| = 1.$$

II.3 Déterminant

Théorème II.11 (admis)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application, appelée **déterminant**, notée det de $(\mathbb{R}^n)^n = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ fois}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

1. det est n-linéaire i.e. linéaire par rapport à chaque colonne : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, et tout $(C_1,\ldots,C_n,C_i') \in (\mathbb{R}^n)^{n+1}$, et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$\det(C_1,\ldots,\lambda C_i + \mu C_i',\ldots,C_n) = \lambda\det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_n) + \mu\det(C_1,\ldots,C_i',\ldots,C_n)$$
2. det est alternée : pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]$, $i \neq j$, et tout $(C_1,\ldots,C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$,
$$\det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_j,\ldots,C_n) = -\det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_i,\ldots,C_n) \qquad C_i \leftrightarrow C_j.$$
3. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $\det(\mathscr{C}) = 1$.

Remarque 12 : A partir de cette définition, on définit le déterminant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice considérée.

Proposition II.12

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) = \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. On a alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ notation}} = ad - bc.$$

Démonstration. Par linéarité par rapport à la première variable,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = \det\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) = a \det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right) + c \det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right).$$

De même par linéarité par rapport à la seconde variable,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab \det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + ad \det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + bc \det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + cd \det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Or puisque det est alterné, $\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, $C_1 \leftrightarrow C_2$. Donc $\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0$. De même, $\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$. Enfin, $\det\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = -\det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Par conséquent,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = (ad - bc) \det\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Enfin en posant $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, par définition du déterminant, $\det(\mathscr{C}) = 1$. Finalement, on a bien

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc.$$

□

On rappelle que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Corollaire II.13

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Démonstration. EXO !

□

Définition II.14

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$. On appelle **produit mixte** du plan de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u}, \vec{v}]$, le réel $[\vec{u}, \vec{v}] = \det(\vec{u}, \vec{v})$.

Définition II.15

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orientés dans le sens direct** si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \geqslant 0.$$

Remarque 13 : On admet que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orientés dans le sens direct, alors on passe de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ dans le sens trigonométrique.

Dessin :

III Repères/bases orthonormés directs

Définition III.1

Soient $O \in \mathscr{P}$ et $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ une base de $\vec{\mathscr{P}}$.

- On dit que $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une **base orthonormée directe** si et seulement si
  1. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont normés, $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$.
  2. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, $\left\langle \vec{i} \middle| \vec{j} \right\rangle = 0$.
  3. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orientés de sens direct, $\det\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \geqslant 0$.
- On dit que $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un **repère orthonormé direct** si et seulement $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base orthonormée directe.

Proposition III.2

Soit $\mathscr{R}_1 = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$. Le repère $\mathscr{R}_2 = (A; \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé direct si et seulement s'il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j} \end{cases}$$

Dessin :

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Soit $\mathscr{R}_2 = (A; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct. Démontrons l'existence du réel θ. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ les coordonnées polaires de $\vec{u}$ dans le repère $\mathscr{R}_1$:

$$\vec{u} = r\cos(\theta)\,\vec{i} + r\sin(\theta)\,\vec{j}.$$

Par hypothèse, $\vec{u}$ est normé donc

$$1 = \|u\|^2 = \left\|r\cos(\theta)\,\vec{i}\right\|^2 + 2\left\langle r\cos(\theta)\,\vec{i} \middle| r\sin(\theta)\,\vec{j}\right\rangle + \left\|r\sin(\theta)\,\vec{j}\right\|^2$$

Donc par la bilinéarité du produit scalaire,

$$1 = r^2\cos^2(\theta)\left\|\overrightarrow{i}\right\|^2 + 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\left\langle\overrightarrow{i}\middle|\overrightarrow{j}\right\rangle + r^2\sin^2(\theta)\left\|\overrightarrow{j}\right\|^2$$

Or $\left\|\overrightarrow{i}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{J}\right\|^2 = 1$ et $\left\langle\overrightarrow{i}\middle|\overrightarrow{j}\right\rangle = 0$ car la repère $\mathscr{R}_1$ est orthonormé. D'où,

$$1 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)\left\|\overrightarrow{j}\right\|^2 = r^2.$$

$r > 0$, conclusion, $r = 1$ et

$$\overrightarrow{u} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{j}.$$

De même, il existe $\theta' \in [0; 2\pi[$ tel que

$$\overrightarrow{v} = \cos(\theta')\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta')\,\overrightarrow{j}.$$

De plus $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. Donc, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}0 = \langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle &= \cos(\theta)\cos(\theta')\left\langle\overrightarrow{i}\middle|\overrightarrow{i}\right\rangle + \cos(\theta)\sin(\theta')\left\langle\overrightarrow{i}\middle|\overrightarrow{j}\right\rangle + \sin(\theta)\cos(\theta')\left\langle\overrightarrow{j}\middle|\overrightarrow{i}\right\rangle + \sin(\theta)\sin(\theta')\left\langle\overrightarrow{j}\middle|\overrightarrow{j}\right\rangle\\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta').\end{aligned}$$

On reconnait une formule de trigonométrie, donc,

$$\cos(\theta' - \theta) = 0.$$

D'autre part, par bilinéarité du déterminant,

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= \cos(\theta)\cos(\theta')\det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}\right) + \cos(\theta)\sin(\theta')\det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)\\ &\qquad + \sin(\theta)\cos(\theta')\det\left(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}\right) + \sin(\theta)\sin(\theta')\det\left(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}\right)\\ &= (\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta'))\det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)\\ &= \sin(\theta' - \theta)\det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right).\end{aligned}$$

Or par hypothèse $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ sont deux repères directs donc $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \geqslant 0$ et $\det\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) \geqslant 0$. Par conséquent, $\sin(\theta' - \theta) \geqslant 0$ et puisque $\cos(\theta' - \theta) = 0$, on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $\theta' - \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Donc

$$\cos(\theta') = -\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta') = \cos(\theta).$$

Et finalement,

$$\overrightarrow{v} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{j}.$$

Réciproquement, en utilisant les propriétés de la norme, du produit scalaire et du déterminant, on vérifie que si $\overrightarrow{u} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{j}$ alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée directe. □

Remarque 14 : En gardant les notations de la proposition, on observe que

$$\mathrm{mat}_{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la matrice de rotation d'angle θ. Rotation qui permet de passer de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. En l'inversant, on obtient également que

$$\mathrm{mat}_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Tout cela est très cohérent car l'on obtient par parité/imparité du cosinus/sinus la matrice de rotation d'angle $-\theta$ qui est bien la rotation pour passer de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ à $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Proposition III.3

Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) \in \vec{\mathscr{P}}$ une base orthonormée du plan et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$ un vecteur. Alors les coordonnées cartésiennes (x, y) de $\vec{u}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ sont données par

$$x = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{i} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad y = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{j} \right\rangle.$$

Démonstration. Par définition, $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Donc

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{u} \middle| \vec{i} \right\rangle &= x \left\langle \vec{i} \middle| \vec{i} \right\rangle + y \left\langle \vec{j} \middle| \vec{i} \right\rangle && \textit{par linéarité} \\ &= x && \textit{car } \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \textit{ est orthonormée.} \end{aligned}$$

De même pour $\left\langle \vec{u} \middle| \vec{j} \right\rangle$.

□

IV Expressions des opérateurs vectoriels

IV.1 En base orthonormée quelconque

Proposition IV.1

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ une base orthonormée de $\vec{\mathscr{P}}$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathscr{P}}$ deux vecteurs du plan et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$ respectivement de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = xx' + yy'$
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.

Démonstration. Notons $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{i} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $\vec{j} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Donc, par la formule $X = PX'$,

$$\begin{aligned} \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}) &= \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) & x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) & x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De là, on en déduit les calculs qui suivent.

1. Pour le produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle &= (x\cos(\theta) - y\sin(\theta))(x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta)) + (x\sin(\theta) + y\cos(\theta))(x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta)) \\ &= xx'\cos^2(\theta) - (xy' + x'y)\cos(\theta)\sin(\theta) + yy'\sin^2(\theta) \\ &\qquad xx'\sin^2(\theta) + (xy' + x'y)\cos(\theta)\sin(\theta) + yy'\cos^2(\theta) \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

2. Pour la norme, d'après le point précédent,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle} = \sqrt{xx + yy} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Pour le déterminant/produit mixte,

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x\cos(\theta)-y\sin(\theta) & x'\cos(\theta)-y'\sin(\theta) \\ x\sin(\theta)+y\cos(\theta) & x'\sin(\theta)+y'\cos(\theta)\end{vmatrix} \\ &= xy'\cos^2(\theta)+(xx'-yy')\cos(\theta)\sin(\theta)-x'y\sin^2(\theta) \\ &\quad -\left[x'y\cos^2(\theta)+(xx'-yy')\cos(\theta)\sin(\theta)-xy'\sin^2(\theta)\right] \\ &= xy'-x'y.\end{aligned}$$

□

IV.2 Formulation géométrique

Proposition IV.2

Soient $(\vec{u},\vec{v})\in\vec{\mathscr{P}}^2$ deux vecteurs du plan. Alors

1. $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$
2. $\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$

Démonstration. Si $\vec{u}=\vec{0}$ le résultat est immédiat. Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, on pose $\vec{i}=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. On vérifie alors que

$$\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\|=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\|=1.$$

Autrement dit $\vec{i}$ est normé. Donc comme vu précédemment, en notant $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que

$$\vec{i}=\cos(\theta)\,\vec{e_1}+\sin(\theta)\,\vec{e_2}.$$

On pose alors $\vec{j}=-\sin(\theta)\,\vec{e_1}+\cos(\theta)\,\vec{e_2}$. D'après ce qui précède, $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée. Soit $r'=\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta'\in\mathbb{R}$ des coordonnées polaires de $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Pour le produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle &= \left\langle \|u\|\,\vec{i}\,\middle|\, r'\cos(\theta')\,\vec{i}+r'\sin(\theta')\,\vec{j}\right\rangle \\ &= \|u\|\,r'\cos(\theta')\left\langle\vec{i}\middle|\vec{i}\right\rangle+\|u\|\,r'\sin(\theta')\left\langle\vec{i}\middle|\vec{j}\right\rangle \\ &= \|u\|\,r'\cos(\theta'),\end{aligned}$$

car $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormée. De plus, $r'=\|\vec{v}\|$ et $\theta'=(\vec{u},\vec{v})$. D'où

$$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

2. Pour le produit mixte,

$$\begin{aligned}\det(\vec{u},\vec{v}) &= \det\left(\|u\|\,\vec{i},r'\cos(\theta')\,\vec{i}+r'\sin(\theta')\,\vec{j}\right) \\ &= \begin{vmatrix}\|u\| & r'\cos(\theta') \\ 0 & r'\sin(\theta')\end{vmatrix} \qquad \textit{car } \left(\vec{i},\vec{j}\right) \textit{ est orthonormée} \\ &= \|u\|\,r'\sin(\theta').\end{aligned}$$

Comme $r'=\|\vec{v}\|$ et $\theta'=(\vec{u},\vec{v})$, on conclut de même que

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}).$$

□

Définition IV.3

Soit $\vec{e}\in\vec{\mathscr{P}}$ un vecteur unitaire. Pour tout $\vec{u}\in\vec{\mathscr{P}}$, on appelle **projeté orthogonal** de $\vec{u}$ sur $\vec{e}$ ou sur la droite $\mathrm{Vect}(\vec{e})$ le vecteur

$$\langle\vec{u}|\vec{e}\rangle\,\vec{e}.$$

Dessin :

Remarque 15 : ATTENTION, $\vec{e}$ doit être unitaire. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ n'est pas unitaire, on le normalise en posant $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est alors donné par

$$\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e} = \left\langle \vec{u} \middle| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

Proposition IV.4

Soit $\vec{e} \in \vec{\mathscr{P}}$ un vecteur unitaire. Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$ et notons $p_{\vec{e}}(\vec{u})$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{e}$. Alors, $\vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u})$ est orthogonal à $\vec{e}$.

Démonstration. On a les égalité suivante dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u}) | \vec{e} \rangle &= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle p_{\vec{e}}(\vec{u}) | \vec{e} \rangle \\
&= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e} | \vec{e} \rangle \\
&= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \langle \vec{e} | \vec{e} \rangle \\
&= \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle - \langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \qquad \textit{car } \vec{e} \textit{ est unitaire.} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque 16 : On a les égalités suivantes :

$$\|p_{\vec{e}}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \, |\cos(\vec{e}, \vec{u})| \qquad \text{et} \qquad \|\vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \, |\sin(\vec{e}, \vec{u})|$$

En effet, par définition,

$$\|p_{\vec{e}}(\vec{u})\| = \|\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle \, \vec{e}\| = |\langle \vec{u} | \vec{e} \rangle| \, \|\vec{e}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{e}\| \, |\cos(\vec{e}, \vec{u})| \, \|\vec{e}\| = \|\vec{u}\| \, |\cos(\vec{e}, \vec{u})| \, .$$

Puisque $p_{\vec{e}}(\vec{u})$ et $\vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u})$ sont orthogonaux, par le théorème de Pythagore,

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u}) + p_{\vec{e}}(\vec{u})\|^2 = \|\vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u})\|^2 + \|p_{\vec{e}}(\vec{u})\|^2 \, .$$

Donc par ce qui précède,

$$\|\vec{u} - p_{\vec{e}}(\vec{u})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \cos^2(\vec{e}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \sin^2(\vec{e}, \vec{u}) \, .$$

Proposition IV.5

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}$ deux vecteurs du plan et $ABCD$ un parallélogramme engendré par ces deux vecteurs (A un point quelconque de $\mathscr{P}$, $B = A + \vec{u}$, $D = A + \vec{v}$ et $C = A + \vec{u} + \vec{v}$). On note $\mathscr{A}_{ABCD}$ l'aire du parallélogramme $ABCD$. Alors on a

$$|\det(\vec{u}, \vec{v})| = \mathscr{A}_{ABCD}.$$

Dessin :

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de D sur $\overrightarrow{AB}$, le point H tel que $\overrightarrow{AH}$ soit le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AD}$ sur $\overrightarrow{AB}$ ou encore tel que

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{AD} \middle| \overrightarrow{AB} \right\rangle}{AB^2} \overrightarrow{AB} = \frac{\langle \vec{v} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = p_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right).$$

Alors $[DH]$ est une hauteur du parallélogramme et $\overrightarrow{HD} = \vec{v} - p_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$. D'où

$$\mathscr{A}_{ABCD} = base \times hauteur = HD \times AB = \left\|\overrightarrow{HD}\right\| \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \|\vec{v} - p_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)\| \|\vec{u}\|.$$

D'après la remarque précédente,

$$\mathscr{A}_{ABCD} = \|\vec{v}\| \left|\sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right| \|\vec{u}\| = \left|\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\right|.$$

□

Corollaire IV.6

Soit ABC un triangle du plan. Alors

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|.$$

IV.3 En complexe

Proposition IV.7

Soient $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$ deux vecteurs du plan et z et z' leurs affixes complexes respectives. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$,
2. $\|\vec{u}\| = |z|$,
3. $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \mathrm{Im}\left(z\overline{z'}\right)$.

Démonstration. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. Pour le produit scalaire,
$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(x + iy\right)\left(x' - iy'\right)\right) = \mathrm{Re}\left(xx' + yy' - ixy' + ix'y\right) = xx' + yy' = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle.$$
2. Pour la norme nous l'avons déjà vu,
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{u}\|.$$
3. Pour le déterminant,
$$\mathrm{Im}\left(z\overline{z'}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(x + iy\right)\left(x' - iy'\right)\right) = \mathrm{Re}\left(xx' + yy' - ixy' + ix'y\right) = x'y - xy' = \det\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$

□

V Equations de droites, de cercles

V.1 Equations de droites

Proposition V.1

Dans un repère $\mathscr{R}$, on considère d la droite passant par le point $A\left(x_A, y_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha, \beta)$. Alors,

$$d = A + \operatorname{Vect}\left(\vec{u}\right) = \left\{ M\left(x, y\right) \,\middle|\, \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \right\}.$$

Le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est appelé **représentation paramétrique** de d.

Définition V.2

Soient d une droite, $\vec{u}$ un vecteur directeur de d et $\vec{n}$ un vecteur du plan. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur **normal** à d si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, $\langle \vec{n} | \vec{u} \rangle = 0$.

Remarque 17 :

1. La définition est cohérente au sens où elle ne dépend pas du vecteur directeur choisi. Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de d, alors $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$. Donc

$$\langle \vec{n} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{n} | \lambda\,\vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{n} | \vec{u} \rangle = 0.$$

2. Soient d et d' deux droites et $\vec{u}$, respectivement $\vec{u'}$, un vecteur directeur de d, respectivement de d'.
   - $d \parallel d'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires si et seulement si $\det\left(\vec{u}, \vec{\ }'\right) = 0$.
   - $d \perp d'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left\langle \vec{u} \,\middle|\, \vec{u'} \right\rangle = 0$.

Proposition V.3

Soit d une droite. Alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$d = \left\{ M\left(x, y\right) \mid ax + by + c = 0 \right\},$$

L'équation $ax + by + c = 0$ est appelé **représentation cartésienne** de la droite d.
De plus $\vec{n}\,(a, b)$ est un vecteur normal à d.

Démonstration. Soit $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ une représentation paramétrique de la droite d. Alors en posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$, on a

$$\begin{aligned} M\left(x, y\right) \in d \quad & \Rightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \\ & \Rightarrow \quad \exists t,\ ax + by + c = a\left(x_A + \alpha t\right) + b\left(y_A + \beta t\right) + c \\ & \Rightarrow \quad \exists t,\ ax + by + c = a x_A + \left(a\alpha + b\beta\right) + b y_A + c \\ & \Rightarrow \quad \exists t,\ ax + by + c = \beta x_A + \left(\beta\alpha - \alpha\beta\right) t - \alpha y_A + \alpha y_A - \beta x_A \\ & \Rightarrow \quad ax + by + c = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, si $ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne de d, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors, premier cas, $a \neq 0$.

$$d = \left\{ M\left(x, y\right) \,\middle|\, x = -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} \right\} = \left(-\frac{c}{a}, 0\right) + \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

En particulier, $A\left(-\frac{c}{a},0\right)$ est le point d'intersection de d avec l'axe des abscisses, $\vec{u}=\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de d et on a alors pour $\vec{n}\,(a,b)$,

$$\langle\vec{n}|\vec{u}\rangle = a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\times 1=0.$$

Donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal à d. $\square$

Remarque 18 : Soient d et d' deux droites d'équations cartésiennes respectivement $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.

- $d \parallel d'$ si et seulement si $\vec{n}\,(a,b)$ et $\vec{n'}\,(a',b')$ sont colinéaires : $\det\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=0$.
- $d \perp d'$ si et seulement si $\vec{n}\,(a,b)$ et $\vec{n'}\,(a',b')$ sont orthogonaux : $\left\langle\vec{n}\middle|\vec{n'}\right\rangle=0$.

Exemple 19 :

1. Soit d la droite d'équation cartésienne $2x+y-3=0$. Déterminer une équation paramétrique de d.
2. Soit d la droite d'équation paramétrique $\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=-1-\lambda\end{cases}$. Déterminer une équation cartésienne de d.
3. Soient $A\,(1,1)$ et $B\,(-1,2)$. Déterminer un vecteur directeur, un vecteur normal, une équation paramétrique et une équation cartésienne de (AB).
4. Soient $A\,(0,1)$ et $\vec{u}\,(2,3)$. Déterminer un vecteur normal, une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$.
5. Soit d la droite d'équation $2x-3y+1=0$. Déterminer un vecteur directeur, un vecteur normal, une équation paramétrique et un point de d.

Définition V.4

Soient d une droite du plan et $A\in\mathscr{P}$ un point du plan.

1. On appelle **projeté** de A sur H l'unique point H de d tel que $\overrightarrow{AH}$ soit normal à d.
2. On appelle **distance** de A à d le réel $d\,(A,d)=AH=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|$.

Proposition V.5

Soient d une droite du plan, $A\in\mathscr{P}$ un point du plan et H le projeté de A sur d. Alors la distance de A à H est la plus courte longueur entre A et les points de d :

$$d\,(A,d)=\min_{M\in d}\left\|\overrightarrow{AM}\right\|.$$

Dessin :

Démonstration. Soit $M\in d$, $M\neq H$. Alors $\overrightarrow{MH}$ est un vecteur directeur de d, c'est même par définition de H, le projeté du vecteur $\overrightarrow{MA}$ sur d. On a alors vu précédemment que $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont orthogonaux. Donc par le théorème de Pythagore,

$$\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{HA}\right\|^2\geqslant\left\|\overrightarrow{HA}\right\|^2.$$

Par croissance de la racine carrée,

$$\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\geqslant\left\|\overrightarrow{HA}\right\|=d\,(A,d)\,.$$

Donc $\inf_{M\in d}\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\geqslant d\,(A,d)$. Enfin cette borne inférieure est un minimum car est atteinte pour $M=H\in d$. $\square$

Proposition V.6

1. Soit d une droite passant par $B \in \mathscr{P}$ et de vecteur normal $\vec{n} \in \vec{\mathscr{P}}$. Alors pour tout $A \in \mathscr{P}$,
$$d(A,d) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|}.$$
2. Soit d une droite d'équation $ax + by + c = 0$. Alors pour tout $A(x_A, y_A)$,
$$d(A,d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration.

1. Soit H le projeté de A sur d. Par la relation de Chasles,
$$\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{BH} \middle| \vec{n} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|.$$
Or $B \in d$ et $H \in d$ donc $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur directeur de d (ou est un vecteur nul). Or $\vec{n}$ est un vecteur normal à d donc $\left\langle \overrightarrow{BH} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0$ et
$$\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|.$$
De plus $\overrightarrow{HA}$ est orthogonal à d tout comme $\vec{n}$, donc $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\left(\overrightarrow{HA}, \vec{n}\right) = 0 \mod \pi$ et
$$\left|\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{HA} \middle| \vec{n} \right\rangle\right| = \|HA\| \, \|\vec{n}\| = d(A,d) \, \|\vec{n}\|.$$
2. Si d a pour équation $ax + by + c = 0$ alors $\vec{n}(a,b)$ est un vecteur normal à d et $B\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ est un point de d (si $a \neq 0$ sinon choisir $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$). Donc par le point précédent,
$$d(A,d) = \frac{\left|\left\langle \begin{bmatrix} x_A + \frac{c}{a} \\ y_A \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_A + c + by_A|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

□

V.2 Equation de cercle

Proposition V.7

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega) \in \mathscr{P}$ un point du plan et $R > 0$. Alors le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R est donné par
$$\mathscr{C} = \left\{ M(x,y) \;\middle|\; (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2 \right\}.$$
L'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ est appelé l'équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

Démonstration. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. Par définition d'un cercle,
$$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M = R \quad \Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

□

Exemple 20 :

1. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0$.

Proposition V.8

Soient $(A, B) \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ le cercle dont un diamètre est donné par $[AB]$. Alors

$$\mathscr{C} = \left\{ M \in \mathscr{P} \;\middle|\; \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Démonstration. Notons (x_A, y_A) les coordonnées de A et (x_B, y_B) les coordonnées de B dans un repère orthonormé $\mathscr{P}$. Le rayon de $\mathscr{C}$ est donné par

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x - A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2}.$$

Tandis que le centre Ω est le milieu de $[AB]$ et a donc pour coordonnées

$$x_\Omega = \frac{x_B + x_A}{2}, \qquad y_\Omega = \frac{y_B + y_A}{2}.$$

Donc par la propriété précédente, $\mathscr{C}$ a pour équation

$$\begin{aligned}
& \left(x - \frac{x_B + x_A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_B + y_A}{2}\right)^2 = \frac{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - x\left(x_B + x_A\right) + \frac{x_B^2 + 2x_A x_B + x_A^2}{4} \\
& \qquad + y^2 - y\left(y_B + y_A\right) + \frac{y_B^2 + 2y_A y_B + y_A^2}{4} = \frac{x_B^2 - 2x_B x_A + x_A^2 + y_B^2 - 2y_B y_A + y_A^2}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - x\left(x_B + x_A\right) + y^2 - y\left(y_B + y_A\right) + x_A x_B + y_A y_B = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM} \right\rangle &= \langle (x - x_A, y - y_A) | (x - x_B, y - y_B) \rangle \\
&= \left(x - x_A\right)\left(x - x_B\right) + \left(y - y_A\right)\left(y - y_B\right) \\
&= x^2 - x\left(x_A + x_B\right) + x_A x_B + y^2 - y\left(y_A + y_B\right) + y_A y_B.
\end{aligned}$$

Donc par ce qui précède,

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{BM} \right\rangle = 0.$$

$\square$

Exemple 21 : Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 2$. Soit d la droite d'équation $x + y - 2$. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ avec d.