Chapitre XXVII : Géométrie de l'espace

Nous allons dans ce chapitre revoir les notions introduites dans la géométrie dans le plan et voir leurs applications dans l'espace. On note $\vec{E}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace, espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^3$. On note également $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace, qui est donc un espace affine de direction $\vec{E}$.

I Repères

Définition I.1

Soit $O \in \mathscr{E}$ un point de l'espace et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\vec{E}$. On dit alors que $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ forme un **repère** de l'espace.

Proposition I.2 (Coordonnées cartésiennes)

Soit $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Pour tout point $M \in \mathscr{E}$ de l'espace il existe un unique triplet de réel (x, y, z) tel que

$$M = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On appelle ce triplet les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$.

Démonstration. Comme dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{OM} \in \vec{E}$ peut se décomposer de façon unique dans la base $\mathscr{B} = \left(\vec{j}, \vec{k}\right)$. En notant (x, y, z) ses coordonnées, on obtient,

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

□

Exemple 1 : Soient $A(-2, 4, 1)$, $B(-1, 5, 2)$, $C(0, 6, -3)$ et $D(1, 3, 2)$ et $M(x, y, z)$. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Proposition I.3 (Coordonnées cylindriques)

Soient $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Pour tout $M \in \mathscr{E} \backslash \{O\}$, il existe un unique triplet $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ soient

$$(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

On appelle alors (r, θ, z) les coordonnées cylindriques de M dans $\mathscr{R}$.

Démonstration. Soit (x, y, z) les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$. Posons $\zeta = x + iy \in \mathbb{C}$. D'après le chapitre sur les complexes, il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $r = x^2 + y^2$ et $\theta = \arg(\zeta)$ ou encore tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

□

Remarque 2 : Naturellement θ peut être pris dans $\mathbb{R}$ tout entier l'unicité se conçoit alors modulo 2π.

Dessin :

II Opérateurs vectoriels

II.1 Le produit scalaire

Proposition II.1

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\vec{E}$. Il existe un unique produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur $\vec{E}$ vérifiant

$$\langle\vec{e_1}|\vec{e_1}\rangle = \langle\vec{e_2}|\vec{e_2}\rangle = \langle\vec{e_3}|\vec{e_3}\rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle\vec{e_1}|\vec{e_2}\rangle = \langle\vec{e_1}|\vec{e_3}\rangle = \langle\vec{e_2}|\vec{e_3}\rangle = 0.$$

De plus pour tout $(\vec{u}\,(x,y,z)\,,\vec{v}\,(x',y',z')) \in \mathscr{E}^2$, on a

$$\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = xx' + yy' + zz'.$$

Démonstration. EXO ! Recopier la démonstration donnée dans $\vec{\mathscr{P}}$. □

Remarque 3 : On peut alors étendre les définitions données dans $\vec{\mathscr{P}}$ au vecteurs de l'espace :

1. Deux vecteurs $\vec{u}\,(x,y,z)$ et $\vec{v}\,(x',y',z')$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle = 0$ i.e. $xx'+yy'+zz' = 0$.
2. Pour tout vecteur $\vec{u}\,(x,y,z) \in \vec{E}$, on définit **la norme euclidienne** de $\vec{u}$ par $\vec{u} = \sqrt{\langle\vec{u}|\vec{u}\rangle} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
3. Pour tout $A\,(x_A, y_A, z_A) \in \mathscr{E}$ et $B\,(x_B, y_B, z_B) \in \mathscr{E}$, on a
$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$
4. Un vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ est dit **normé** si sa norme vaut 1 : $\|\vec{u}\| = 1$.

II.2 Le déterminant

Proposition II.2

Par le théorème II.11 du chapitre précédent, on sait qu'il existe une unique forme sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, 3-linéaire, alternée vérifiant $\det(\mathscr{C}) = 1$, où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On appelle encore cette application le déterminant. Pour tout $(\vec{u}\,(x,y,z)\,, \vec{v}\,(x',y',z')\,, \vec{w}\,(x'',y'',z'')) \in \vec{E}^3$, on a

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - x''y'z - y''z'x - z''x'y$$

Exemple 4 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A.
   - Par la méthode de Sarrus *(valable uniquement en dimension 3)*.
   - Par le développement d'une ligne ou d'une colonne avec la règle du signe suivant : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.
2. Faire de même pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition II.3

La méthode de développement du déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne est valable en dimension quelconque.

Exemple 5 : Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire II.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ est triangulaire supérieure $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]$, $j < i$, $a_{i,j} = 0$ (respectivement inférieure), alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}.$$

(respectivement $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.)

Démonstration. Par récurrence en développant par rapport à la première colonne. □

Proposition II.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires ont les effets suivants :

- $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant (propriété d'alternance).
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant par λ (n linéarité).
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne change pas le déterminant !

Proposition II.6 (admise)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$.

Corollaire II.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Lorsque A est inversible,

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si A est inversible alors, par ce qui précède $1 = \det(I_n) = \det\left(A^{-1}A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det(A)$. Donc $\det(A) \neq 0$.
($Leftarrow$) Si A n'est pas inversible alors $A = (C_1, \ldots, C_n)$ où les C_i sont les colonnes de A forment une famille liée. Donc il existe $i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$C_i = \sum_{\substack{j\in[\![1;n]\!] \\ i\neq j}} \lambda_j C_j.$$

Donc par linéarité du déterminant par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ variable,

$$\begin{aligned}\det(A) = \det(C_1, \dots, C_n) &= \sum_{j<i} \lambda_j \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n) \\ &+ \sum_{j>i} \lambda_j \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n).\end{aligned}$$

Soit $j < i$, alors en échangeant la colonne numéro i avec la colonne numéro j, on a

$$\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n).$$

Et donc, $\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n) = 0$. De même si $j > i$. Conclusion,

$$\det(A) = 0.$$

□

Proposition II.8 (admise)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A).$$

Et donc il est possible d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$ change le signe du déterminant (propriété d'alternance).
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie le déterminant par λ (n linéarité).
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne change pas le déterminant !

Proposition II.9

Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}$. Les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont coplanaires si et seulement s'ils sont liés si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Démonstration. Par la négation, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont libres si et seulement s'ils forment une base de $\vec{E}$ (car la famille est de cardinal 3) si et seulement si $P = \text{mat}_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est matrice de passage (avec $\mathscr{C}$ la base canonique de $\vec{E}$) si et seulement si P est inversible si et seulement $\det(P) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

□

Définition II.10

Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3$ trois vecteurs de $\vec{E}$, on dit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **orienté dans le sens direct** si et seulement si

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \geqslant 0.$$

II.3 Le produit vectoriel

Théorème II.11

Il existe une unique application de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\vec{E}$, notée $\cdot \wedge \cdot$, appelée **produit vectoriel** vérifiant les propriétés suivantes.

- *Bilinéarité.*
  1. Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, $\left(\vec{v}, \vec{v'}\right) \in \vec{E}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\vec{u} \wedge \left(\lambda\, \vec{v} + \mu \vec{v'}\right) = \lambda\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) + \mu\left(\vec{u} \wedge \vec{v'}\right).$$
  2. Pour tout $\left(\vec{u}, \vec{u'}\right) \in \vec{E}^2$, $\vec{v} \in \vec{E}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
  $$\vec{u} \wedge \left(\lambda\, \vec{v} + \mu \vec{v'}\right) = \lambda\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) + \mu\left(\vec{u} \wedge \vec{v'}\right).$$
- *Antisymétrique/alternée.* Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- En notant $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\vec{E}$, on a
$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}, \qquad \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}, \qquad \vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}.$$

Proposition II.12

Pour tout $\left(\vec{u}\,(x, y, z)\,, \vec{v}\,(x', y', z')\right) \in \vec{E}^2$, on a
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yz' - zy' \\ zx' - z'x \\ xy' - yx' \end{bmatrix}$$

Démonstration. Par bilinéarité,
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} = \quad & xx'\vec{e_1} \wedge \vec{e_1} + xy'\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} + xz'\vec{e_1} \wedge \vec{e_3} \\ & + yx'\vec{e_2} \wedge \vec{e_1} + yy'\vec{e_2} \wedge \vec{e_2} + yz'\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} \\ & + zx'\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} + zy'\vec{e_3} \wedge \vec{e_2} + zz'\vec{e_3} \wedge \vec{e_3}. \end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1;3]\!]$, par antisymétrie $\vec{e_i} \wedge \vec{e_i} = -\vec{e_i} \wedge \vec{e_i}$ et donc $\vec{e_i} \wedge \vec{e_i} = 0$. Ainsi,
$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= xy'\vec{e_3} - xz'\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} - yx'\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} + yz'\vec{e_1} + zx'\vec{e_2} - zy'\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} \\ &= xy'\vec{e_3} - xz'\vec{e_2} - yx'\vec{e_3} + yz'\vec{e_1} + zx'\vec{e_2} - zy'\vec{e_1} \\ &= (yz' - zy')\,\vec{e_1} + (zx' - xz')\,\vec{e_2} + (xy' - yx')\,\vec{e_3}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 6 : Calculer $\vec{u}\,(1, 2, 3)$ et $\vec{v}\,(1, 0, -1)$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Proposition II.13

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$ deux vecteurs de l'espace.

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à tout vecteur du plan $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ (et notamment à $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

Remarque 7 : Le produit vectoriel N'EST PAS associatif ! ! Exemple si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\vec{e_1} \wedge (\vec{e_2} \wedge \vec{e_2}) = 0 \neq -\vec{e_1} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_2} = (\vec{e_1} \wedge \vec{e_2}) \wedge \vec{e_2}.$$

Définition II.14

Soient $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3$. On appelle **produit mixte** de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le réel

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w} \rangle .$$

Proposition II.15

Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{E}^3$, on a

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) .$$

III Repères/bases orthonormés

Définition III.1

Soient $O \in \mathscr{P}$ et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in \vec{E}^3$ une base de $\vec{E}$.

- On dit que $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une **base orthonormée directe** si et seulement si
  1. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont normés, $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.
  2. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont tous orthogonaux deux à deux : $\left\langle \vec{i} \middle| \vec{j} \right\rangle = \left\langle \vec{i} \middle| \vec{k} \right\rangle = \left\langle \vec{j} \middle| \vec{k} \right\rangle = 0$.
  3. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orientés de sens direct, $\det\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \geqslant 0$.
- On dit que $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un **repère orthonormé direct** si et seulement $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe.

Proposition III.2

Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in \vec{\mathscr{P}}$ une base orthonormée de $\vec{E}$ et $\vec{u} \in \vec{E}$ un vecteur. Alors les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de $\vec{u}$ dans $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont données par

$$x = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{i} \right\rangle, \qquad y = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{j} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad z = \left\langle \vec{u} \middle| \vec{k} \right\rangle .$$

Démonstration. EXO ! □

IV Expressions des opérateurs vectoriels

IV.1 En base orthonormée quelconque

Proposition IV.1

Soit $\mathscr{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \in \vec{E}^3$ une base orthonormée de $\vec{E}$. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ trois vecteurs du plan et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^2$ et $(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ respectivement dans la base $\mathscr{B}$. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. si de plus $\mathscr{B}$ est orientée dans le sens direct alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

IV.2 Formulation géométrique

Proposition IV.2

Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$ deux vecteurs du plan. Alors

1. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$, où $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ est l'angle géométrique (non orienté) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \vec{n}$ où $\vec{n}$ est l'unique vecteur de $\vec{E}$, orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est orienté positivement.

Proposition IV.3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{E}$. On note $\mathcal{P}$ le parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\mathscr{A}(\mathcal{P})$ son aire. Alors

$$\mathscr{A}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

Proposition IV.4

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de $\vec{E}$. On note $\mathcal{P}$ le parallélépipède formé par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\mathscr{V}(\mathcal{P})$ son volume. Alors

$$\mathscr{V}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$

Dessin :

V Droites et plans de l'espace

V.1 Définition

Définition V.1

- On appelle **droite vectoriel** de l'espace tout sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\vec{E}$, i.e. engendré par un vecteur non nul,
$$\vec{\mathcal{D}} = \text{Vect}\,(\vec{u}) = \left\{ t\vec{u} \in \vec{E} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$
- On appelle **plan vectoriel** de l'espace tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\vec{E}$, i.e. engendré par deux vecteurs non colinéaires,
$$\vec{\mathcal{P}} = \text{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v}) = \left\{ \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \in \vec{E} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Définition V.2

- Soit $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{0_{\vec{E}}\}$. L'ensemble
$$\mathcal{D} = A + \text{Vect}\,(\vec{u}) = \{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\} = \{\, M \in \mathscr{E} \mid \exists t \in \mathbb{R},\ M = A + t\vec{u}\,\}$$
est appelé **droite affine** de l'espace $\mathscr{E}$ (de direction $\text{Vect}\,(\vec{u})$).
- Soit $A \in \mathscr{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble
$$\mathcal{P} = A + \text{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v}) = \left\{\, A + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \,\right\} = \left\{\, M \in \mathscr{E} \;\middle|\; \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ M = A + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \,\right\}$$
est appelé **plan affine** de l'espace $\mathscr{E}$ (de direction $\text{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v})$).

Remarque 8 :

- Une droite est définie par
  1. la donnée d'un point et d'un vecteur non nul dit **vecteur directeur**,
  2. ou la donnée de deux points distincts.
- Un plan est défini par
  1. la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires,
  2. ou la donnée de trois points non alignés.

Définition V.3

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de l'espace de direction $\vec{\mathcal{P}}$. Soit $\vec{n} \in \vec{E}$. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ (ou à $\vec{\mathcal{P}}$) s'il est orthogonal à tout vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$.

Remarque 9 :

1. Un vecteur est normal à un plan affine si et seulement s'il est orthogonal à un couple de vecteurs non colinéaires du plan vectoriel associé.
2. Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\,\vec{n}$ est aussi normal à $\mathcal{P}$.
3. Par la proposition II.13, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à $\text{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque 10 : Nous verrons dans la suite qu'un plan vectoriel est entièrement définit par la donnée d'un vecteur normal au plan.
ATTENTION dans l'espace, ce n'est plus le cas pour une droite. En géométrie dans le plan, la donnée d'un vecteur normal suffit à décrire une droite vectoriel. Ce résultat est faux en dimension 3. Il existe toujours une infinité de droites vectoriels orthogonales à un vecteur donné.

Dessin :

V.2 Equations de plans

Dans les propriétés qui suivent, les coordonnées sont données dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Proposition V.4

Soient $A(x_A, y_A) \in \mathscr{E}$ et $(\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma), \vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')) \in \vec{E}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace passant par A et de direction $\operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Alors

$$\mathcal{P} = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \;\middle|\; \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = x_A + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_A + t\beta + s\beta' \\ z = z_A + t\gamma + s\gamma' \end{cases} . \right\}.$$

Ces équations sont appelées les équations paramétriques de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Découle directement de la définition du plan. □

Proposition V.5

Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{E}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est un plan si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que

$$\mathcal{P} = \{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \}.$$

Alors $ax + by + cz + d = 0$ est appelé l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$. De plus $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si $\mathcal{P}$ est un plan affine il admet une équation cartésienne.
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **non colinéaires** de $\mathcal{P}$. On pose $\vec{n}(a,b,c) = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Alors on a vu que $\vec{n}$ est un vecteur non nul normal à $\mathcal{P}$. Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AM} \in \vec{\mathcal{P}}$ et donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

$$0 = \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz + d,$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A$. Donc

$$\mathcal{P} \subseteq \{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \}.$$

Réciproquement avec cette valeur de d, $ax+by+cz+d = 0$ implique que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est libre : soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{n} = \vec{0}.$$

Donc,

$$0 = \left\langle \vec{0} \middle| \vec{n} \right\rangle = \lambda \langle \vec{u} | \vec{n} \rangle + \mu \langle \vec{v} | \vec{n} \rangle + \nu \langle \vec{n} | \vec{n} \rangle = \nu \|\vec{n}\|^2.$$

Or $\|\vec{n}\| \neq 0$ car $\vec{n} \neq \vec{0}$ par hypothèse. Donc $\nu = 0$. Donc $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$. Or $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\lambda = \mu = 0$. Donc la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est libre et de cardinal 3 donc forme une base de $\vec{E}$. Donc il existe (α, β, γ) tel que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{n}.$$

Puisque $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$,

$$0 = \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{u} | \vec{n} \right\rangle + \beta \left\langle \vec{v} | \vec{n} \right\rangle + \gamma \left\langle \vec{n} | \vec{n} \right\rangle = \gamma \left\| \vec{n} \right\|^2.$$

Donc $\gamma = 0$ et donc $\overrightarrow{AM} = \alpha \left\langle \vec{u} | \vec{n} \right\rangle + \beta \left\langle \vec{v} | \vec{n} \right\rangle \in \text{Vect}\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$. On a donc montré que

$$\left\{ M\left(x, y, z\right) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \right\} \subseteq \mathcal{P}.$$

Finalement, $\mathcal{P} = \left\{ M\left(x, y, z\right) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz + d = 0 \right\}$.
Montrons maintenant qu'une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ correspond à un plan. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ vérifiant cette équation. Supposons $a \neq 0$ (les cas $a = 0, b \neq 0$ et $a = b = 0$, $c \neq 0$ se traitent de la même façon). Alors en posant $A = \left(-\frac{b+c+d}{a}, 1, 1\right)$, on vérifie facilement que $A \in \mathcal{P}$. On note (x_A, y_A, z_A) les coordonnées de A alors, on sait que $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Soit $M\left(x, y, z\right) \in \mathscr{E}$. Posons (x', y', z') les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{array}{lll}
M \in \mathcal{P} & \Leftrightarrow & ax + by + cz + d = 0 \\
& \Leftrightarrow & a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0. \qquad \textit{en soustrayant par } ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \\
& \Leftrightarrow & ax' + by' + cz' = 0 \\
& \Leftrightarrow & x' = -\dfrac{b}{a}y' - \dfrac{c}{a}z' \qquad \textit{en supposant ici comme précédemment } a \neq 0 \\
& \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
& \Leftrightarrow & M = A + \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)
\end{array}$$

Notez au passage, que cette démonstration donne une méthode pour passer du paramétrique au cartésien et réciproquement !

□

Exemple 11 : Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes des plans suivants.

1. $\mathcal{P}$ le plan passant par $A\left(1, 1, 1\right)$, $B\left(2, 0, 1\right)$, $C\left(-1, 2, 4\right)$.
2. $\mathcal{P}$ le plan passant par $A\left(1, 2, 1\right)$ dont la direction contient les vecteurs $\vec{u}\left(4, 0, 3\right)$ et $\vec{v}\left(1, 3, -1\right)$.

Proposition V.6

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de $\mathscr{E}$. Soient $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{n'}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}'$. Alors

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.
2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.

Proposition V.7

1. Soit $\mathcal{P} = A + \text{Vect}\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ un plan de l'espace $\mathscr{E}$. On a alors la caractérisation suivante :

$$M \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0.$$

2. Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés et soit $\mathcal{P}$ le plan affine (ABC). Alors,

$$M \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM}\right) = 0.$$

Remarque 12 : Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans affines alors trois situations se présentent.

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles et alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.
2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus et alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

3. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite affine.

Exemple 13 :

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2 - 2y + 2z + 2 = 0$.
2. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2 - 2y + 2z + 1 = 0$.
3. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P} : x - y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : x + y - z - 1 = 0$.

V.3 Equations de droites

Proposition V.8

La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathscr{E}$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \in \vec{E} \setminus \{\overrightarrow{0_E}\}$ est donnée par ses équations paramétriques :

$$\mathcal{D} = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \;\middle|\; \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \right\}.$$

Proposition V.9

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de l'espace. Alors il existe $a, b, c, d, a', b', c', d'$ des réels tel que $\mathcal{D}$ est donnée par ses équations cartésiennes suivantes :

$$\mathcal{D} = \left\{ M(x,y,z) \in \mathscr{E} \;\middle|\; \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \right\}.$$

De plus les vecteurs $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n'}(a', b', c')$ sont non nuls, non colinéaires et normaux à $\mathcal{D}$.

Remarque 14 : Il apparait clairement dans les équations cartésiennes qu'une droite est l'intersection de deux plans.

Exemple 15 :

1. Donner les équations paramétriques de la droite définie par $\begin{cases} 5x - 2y + 7z - 8 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$.
2. Donner les équations cartésiennes de la droite définie par $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

V.4 Projeté sur une droite

Définition V.10

Soient $A \in \mathscr{E}$, $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{\overrightarrow{0_E}\}$, $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ une droite affine de l'espace et $M \in \mathscr{E}$ un point de l'espace.

- On appelle **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{D}$, l'unique point $H \in \mathcal{D}$ donné par
$$H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$
- On appelle distance de H à $\mathcal{D}$, noté $d(M, \mathcal{D})$, le réel défini par
$$d(M, \mathcal{D}) = HM = \left\| \overrightarrow{HM} \right\|.$$

Remarque 16 :

- En particulier, $\frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ est le projeté de $\overrightarrow{AM}$ sur la droite vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{u})$.
- Si, $\vec{u}$ est unitaire, le projeté est donné par $H = A + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle \vec{u}$.

Proposition V.11

Soient $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ une droite affine, $M \in \mathscr{E}$ un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors $\overrightarrow{HM}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Démonstration. On a par la relation de Chasles,

$$\left\langle \overrightarrow{HM} \middle| \vec{u} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = \left\langle -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AH} \middle| \vec{u} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle .$$

Or par définition de H, $\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$. Donc,

$$\left\langle \overrightarrow{HM} \middle| \vec{u} \right\rangle = -\frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \right\rangle = 0.$$

□

Proposition V.12

Soient $A \in \mathscr{E}$, $\vec{u} \in \vec{E} \setminus \{\overrightarrow{0_E}\}$, $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ une droite affine de l'espace et $M \in \mathscr{E}$ un point de l'espace. La distance de M à $\mathcal{D}$ est donné par

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration. Soit H le projeté de M sur $\mathcal{D}$. On a, par linéarité,

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}.$$

Or $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$. Ainsi,

$$\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\| = \left\| \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \right\| = \left\| \overrightarrow{HM} \right\| \|\vec{u}\| \left| \sin\left(\overrightarrow{HM}, \vec{u} \right) \right| .$$

Or $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Donc $\left| \sin\left(\overrightarrow{HM}, \vec{u} \right) \right| = 1$. Finalement,

$$\frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \overrightarrow{HM} \right\| \|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \left\| \overrightarrow{HM} \right\| = d(M, \mathcal{D}).$$

□

Exemple 17 :

1. Déterminer la distance de $A(-1, 1, 3)$ à la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la distance de $A(1, 2, 3)$ à la droite d'équations $\begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x + y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

V.5 Projeté sur un plan

Définition V.13

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A \in \mathscr{E}$ et de vecteur normal $\vec{n} \in \vec{E} \setminus \{0_E\}$. Soit $M \in \mathscr{E}$.

- On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, le point H défini par

$$H = M - \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}.$$

- On appelle distance de M à $\mathcal{P}$, notée $d(M, \mathcal{P})$, le réel

$$d(M, \mathcal{P}) = HM = \left\| \overrightarrow{HM} \right\|.$$

Dessin :

Proposition V.14

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A \in \mathscr{E}$. Soient $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires. Alors pour tout $M \in \mathscr{E}$,

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\rangle\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right)\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$$

Notamment si $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et si M a pour coordonnées (x_M, y_M, z_M), alors

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Remarque 18 : Pour une droite $\mathcal{D}$ passant par A dans l'espace, on a toujours $d(M,\mathcal{D}) = \min_{B \in \mathcal{D}} \left\|\overrightarrow{BH}\right\|$.

De même pour un plan $\mathcal{P}$ passant par A, on a aussi, $d(M,\mathcal{P}) = \min_{B \in \mathcal{P}} \left\|\overrightarrow{BH}\right\|$.

Exemple 19 :

1. Déterminer la distance de $M(1,1,1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équations $\begin{cases} x = 2+t-s \\ y = 3-t+2s \\ z = 1+2t+s \end{cases}$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les plans $\mathcal{P} : x-2y+2z-1=0$ et $\mathcal{P}' : 2x-4y+4z-3=0$ sont parallèles et calculer la distance de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{P}'$.

VI Equations de sphères

Proposition VI.1

La sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ a pour équation cartésienne

$$(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 + (z-z_\Omega)^2 = R^2.$$

Exemple 20 :

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant $x^2+y^2+z^2+2x-1y+5=0$.

Intersection d'une sphère et d'une droite. Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite.

(i) si $d(\Omega,\mathcal{D}) > R$, l'intersection est vide.

(ii) si $d(\Omega,\mathcal{D}) = R$, l'intersection est un point, la droite est tangente à la sphère.

(iii) si $d(\Omega,\mathcal{D}) < R$, l'intersection est un couple de points.

Exemple 21 :

1. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-11=0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$
2. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-3/2=0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$
3. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-11=0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x-y+3=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

Intersection d'une sphère avec un plan. Soient $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R.

(i) si $d(\Omega, \mathcal{P}) > R$, l'intersection est vide.

(ii) si $d(\Omega, \mathcal{P}) = R$, l'intersection est un point, le plan est tangent à la sphère.

(iii) si $d(\Omega, \mathcal{P}) < R$, l'intersection est un cercle.

Exemple 22 :

1. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ avec le plan $\mathcal{P} : 2x-y+3z-2=0$.
2. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+2y+z^2-2=0$ avec le plan $\mathcal{P} : x+y+z-2=0$.
3. Déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+5/3=0$ avec le plan $\mathcal{P} : x-y+z+1=0$.

Intersection de deux sphères. Soient $\mathcal{S}$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{S}'$ une autre sphère de centre Ω' et de rayon R'.

(i) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) > R+R'$, l'intersection est vide.

(ii) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) = R+R'$, l'intersection est un point, les sphères sont extérieurement tangentes.

(iii) si $|R-R'| \leqslant d\left(\Omega, \Omega'\right) < R+R'$, l'intersection est un cercle.

(iv) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) = |R-R'|$, l'intersection est un point, les sphères sont intérieurement tangentes.

(v) si $d\left(\Omega, \Omega'\right) < |R-R'|$, l'intersection est vide.

Exemple 23 :

1. Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+5=0$ et $\mathcal{S}' : x^2+y^2+z^2-5x-3y+5z+4=0$.
2. Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$ et $\mathcal{S}' : x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2=0$.
3. Déterminer l'intersection des sphères $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-13=0$ et $\mathcal{S}' : x^2+y^2+z^2-1=0$.