Chapitre III : Les Nombres Complexes

I L'ensemble des nombres complexes

I.1 Construction de $\mathbb{C}$

La construction rigoureuse qui va suivre de l'ensemble des nombres complexes me semble importante pour votre culture mais n'est pas exigible.
On munit $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels $\mathbb{R}^2 = \{(a,b)\,,\ a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ définies par

$$\begin{aligned} &\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2, \qquad (a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b') = (a+a', b+b') \\ &\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2, \qquad (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)\,. \end{aligned}$$

Notez que si l'opération $+_{\mathbb{C}}$ est naturelle, l'opération $\times_{\mathbb{C}}$ n'est pas la multiplication naturelle (aa', bb'). Pourtant ces deux opérations vérifient des propriétés très analogues à celle de l'addition des réels $+$ et celle de la multiplication des réels $\times$.

- Les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont associatives. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} \left[(a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b')\right] +_{\mathbb{C}} (a'',b'') &= (a,b) +_{\mathbb{C}} \left[(a',b') +_{\mathbb{C}} (a'',b'')\right] \\ \left[(a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b')\right] \times_{\mathbb{C}} (a'',b'') &= (a,b) \times_{\mathbb{C}} \left[(a',b') \times_{\mathbb{C}} (a'',b'')\right]. \end{aligned}$$
- Les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ sont commutatives. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} (a,b) +_{\mathbb{C}} (a',b') &= (a',b') +_{\mathbb{C}} (a,b) \\ (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') &= (a',b') \times_{\mathbb{C}} (a,b)\,. \end{aligned}$$
- La loi $\times_{\mathbb{C}}$ est distributive sur la loi $+_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2$,
$$(a,b) \times_{\mathbb{C}} \left[(a',b') +_{\mathbb{C}} (a'',b'')\right] = (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a',b') +_{\mathbb{C}} (a,b) \times_{\mathbb{C}} (a'',b'')\,.$$
- Il existe un élément neutre pour la loi $+_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b) +_{\mathbb{C}} (0,0) = (0,0) +_{\mathbb{C}} = (a,b)$.
- Il existe un élément neutre pour la loi $\times_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b) \times_{\mathbb{C}} (1,0) = (1,0) \times_{\mathbb{C}} = (a,b)$.
- Tout élément admet un opposé pour la loi $+_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a,b) +_{\mathbb{C}} (-a,-b) = (-a,-b) +_{\mathbb{C}} (a,b) = (0,0).$$
- Tout élément non nul (différent de $(0,0)$) admet un inverse pour la loi $\times_{\mathbb{C}}$. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$(a,b) \times_{\mathbb{C}} \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \times_{\mathbb{C}} (a,b) = (1,0).$$

Lorsqu'un ensemble possède toutes ces bonnes propriétés, on dit que c'est un *corps*. On en déduit ici que $\left(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}}\right)$ est un corps. Bien entendu $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps. On sait également que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps. Pourtant $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et a fortiori $(\mathbb{N}, +, \times)$ ne sont pas des corps. Pourquoi ?

Définition I.1

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ est un corps appelé **le corps des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$.

I.2 Formulation plus pratique de $\mathbb{C}$

Inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Cette définition de $\mathbb{C}$ est élégante et rigoureuse mais peu pratique pour manipuler les nombres complexes. Dans les propriétés ci-dessus, nous nous apercevons que le couple $(0,0)$ a les mêmes propriétés que $0_{\mathbb{R}}$ et de même $(1,0)$ a les mêmes propriétés que $1_{\mathbb{R}}$. Si l'on va plus loin on s'aperçoit que l'ensemble $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(a,0)\ ,\ a\in\mathbb{R}\}$ se comporte exactement comme $\mathbb{R}$. Plus précisément, l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\times\{0\}\\ a &\mapsto (a,0)\end{aligned}$$

est une bijection qui est compatible avec les lois des ensembles, c'est-à-dire telle que $\forall\,(a,a')\in\mathbb{R}^2$, $\Phi\,(a+a') = \Phi(a) +_{\mathbb{C}} \Phi\,(a')$ et telle que $\forall\,(a,a')\in\mathbb{R}^2$, $\Phi\,(aa') = \Phi(a)\times_{\mathbb{C}}\Phi\,(a')$. A ce titre, on fait la confusion entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\times\{0\}$ et par abus (mais toléré et même bienvenu !) on dit que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ et on désignera alors tout élément complexe $(a,0)$ par le réel a, $(a,0)=a$.

<u>Citation :</u> *« Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes. » Henri Poincaré.*

Définition de i. Continuons notre description de $\mathbb{C}$ et regardons maintenant la seconde coordonnée. Notamment le couple $(0,1)$. On voit que $(0,1)^2 = (0,1)\times_{\mathbb{C}}(0,1) = (0\times 0 - 1\times 1, 0\times 1 + 1\times 0) = (-1,0) = -(1,0) = -1$. En résumé, $(0,1)^2=-1$.

Définition I.2

Dans $\mathbb{C}$, on définit le complexe $i=(0,1)$.

Proposition I.3

Le complexe i vérifie $i^2=-1$ et n'est pas un nombre réel.

On peut maintenant donner une description plus agréable de $\mathbb{C}$ car tout complexe va pouvoir s'écrire en fonction de $1=(1,0)$ et de $i=(0,1)$. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$(a,b) = a\times_{\mathbb{C}}(1,0) +_{\mathbb{C}} b\times_{\mathbb{C}}(0,1) = a\times_{\mathbb{C}} 1 + b\times_{\mathbb{C}} i = a+ib.$$

Définition-Proposition I.4

Pout tout complexe $z\in\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $z=a+ib$.

Remarque 1 : Avec cette notation, les opérations $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ non seulement étendent les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ à un ensemble plus vaste $\mathbb{C}$ mais possèdent les mêmes propriétés agréables sur cet ensemble plus vaste $\mathbb{C}$ (associativité, commutativité, distributivité,...). En conséquence $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ s'écriront tout simplement $+$ et $\times$ (ou $\cdot$ ou sans signe).

Proposition I.5

Pour tout $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'\in\mathbb{C}$, avec $(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$, on a
- $z+z' = a+a'+i\,(b+b')$
- $zz' = aa'-bb'+i\,(ab'+a'b)$.

Définition I.6

Pour tout complexe $z=a+ib\in\mathbb{C}$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,
- Le réel a est appelé **la partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé **la partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.
- L'écriture $a+ib$ est appelé **la forme algébrique** ou **forme cartésienne** de z.

Exemple 2 : Calculer la forme algébrique des complexes $(1+i)^2\,(2-i)+(3+6i)\,(3-6i)$ et $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$.

Définition I.7

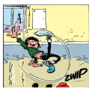
Un complexe $z\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z)=0$ est dit **imaginaire pur.** L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Proposition I.8

- Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z').$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(z) = 0.$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad z \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(z) = 0.$



Remarque 3 : ATTENTION, il est absolument faux en général d'affirmer que la partie réelle d'un produit est le produit des parties réelles. De même pour la partie imaginaire.

I.3 Représentation graphique

On note $\mathscr{P}$ le plan euclidien usuel muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Proposition I.9

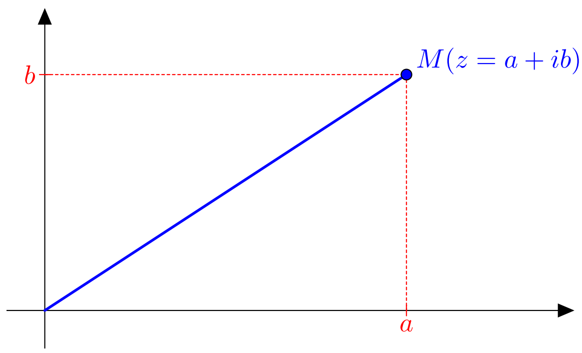
Il est possible d'identifier $\mathbb{C}$ à l'ensemble $\mathscr{P}$ de la façon suivante :

- A tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b)\mathbb{R}^2$, on associe le point $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées $M(a; b)$. On le note
- Réciproquement à tout point du plan $M(a; b) \in \mathscr{P}$, on associe le complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Cette identification est valide car l'application

$$\Phi : \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathscr{P} \\ z = a + ib \mapsto M(a; b) \end{array}$$

est bijective.



Définition I.10

Pour signifier que le point $M(a; b)$ est LE point associé au complexe z, on le note $M(z)$. Le complexe z est alors appelé **l'affixe** du point M. L'ensemble des points $M(z)$ avec $z \in \mathbb{C}$ est appelé **le plan complexe**.

Proposition I.11

L'ensemble $\mathbb{C}$ s'identifie également à l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathscr{P}$ muni de sa base usuelle $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$. Alors l'application

$$\Psi : \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ z = a + ib \mapsto \vec{u}(a, b) \end{array}$$

est une bijection. On dit alors également que $z = a + ib$ est l'affixe de $\vec{u}(a, b)$.

Remarque 4 : Suite à ces deux identifications, voici quelques propriétés utiles,

- Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z_A et z_B respectivement, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

- Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ d'affixe z_A et z_B respectivement, le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixe z et z' respectivement. Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.
- Soient $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixe z et λ un réel, le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe λz.

Exemple 5 : Soient $A\,(2+4i)$, $B\,(1+2i)$ et $C\,(5-i)$ trois points du plan complexe. Déterminer l'affixe de D tel que $ABCD$ soient un parallélogramme puis l'affixe de I, l'intersection des diagonales AC et BD.

I.4 La conjugaison

Définition I.12

Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, le complexe

$$\overline{z}=a-ib.$$

Proposition I.13

Pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$,

1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
2. $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
3. $\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \overline{\lambda z}=\lambda\overline{z}$
4. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$
5. $\forall p\in\mathbb{Z},\quad \overline{z^p}=\overline{z}^p$
6. $\overline{\overline{z}}=z$.

Démonstration. Exercice ! □

Application 6 : Pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué. Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}^*$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On a

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)}+i\underbrace{\frac{-b}{a^2+b^2}}_{=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Remarque 7 : Cette pratique de multiplier la fraction par le conjugué du dénominateur permet systématiquement « d'éliminer » le complexe i du dénominateur.

Proposition I.14

Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}\qquad\text{et}\qquad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

On a de plus les caractérisations suivantes :

$$z\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{z}=z\qquad\text{et}\qquad z\in i\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{z}=-z.$$

Démonstration. Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{a+ib+(a-ib)}{2}=\frac{2a}{2}=a=\mathrm{Re}(z)$ et de même $\frac{z-\overline{z}}{2}=\frac{a+ib-(a-ib)}{2}=\frac{2ib}{2i}=b=\mathrm{Im}(z)$.
Pour les caractérisations, procédons par double implications. Soit $z\in\mathbb{R}$, alors $z=a+0i$, avec $a=z\in\mathbb{R}$ et donc $\overline{z}=a-0i=a=z$. Réciproquement, soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{z}=z$ alors

$$a-ib=a+ib\Rightarrow 2ib=0\Rightarrow b=0.$$

Donc $z=a\in\mathbb{R}$.
De même soit $z\in i\mathbb{R}$, alors il existe un unique $b\in\mathbb{R}$ tel que $z=ib$. Donc $\overline{z}=-ib=-z$. Réciproquement pour $z=a+ib\in\mathbb{C}$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $\overline{z}=-z$, on a

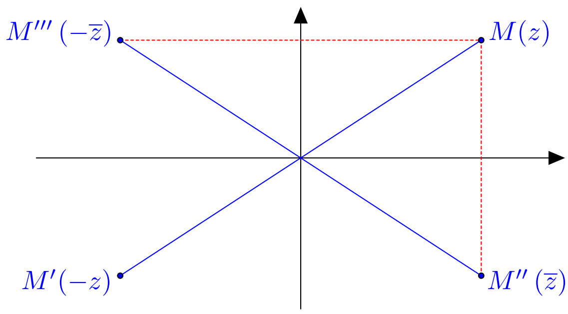
$$a-ib=-a-ib\Rightarrow 2a=0\Rightarrow a=0.$$

Donc $z=ib\in i\mathbb{R}$. □

Proposition I.15

Soient $M \in \mathscr{P}$ un point du plan et $z \in \mathbb{C}$ son affixe.

- Le point M' d'affixe $-z$ est l'image M par la symétrie centrale de centre $O(0)$.
- Le point M'' d'affixe $\overline{z}$ est l'image de M par la symétrie axiale d'axe celui des réels (Ox).
- Le point M''' d'affixe $-\overline{z}$ est l'image de M par la symétrie axiale d'axe celui des imaginaires purs (Oy).



II Forme trigonométrique

II.1 Module d'un nombre complexe

Définition II.1

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. **Le module** de z, noté $|z|$, est le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition II.2

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Remarques 8 :

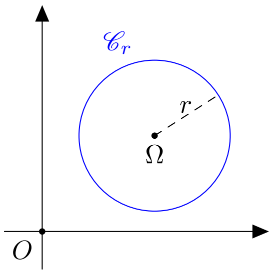
- Ce n'est pas une malheureuse coïncidence si le module d'un complexe s'écrit de la même façon que la valeur absolue d'un réel. En effet pour tout $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, le module de $a = a + 0i$ vaut $|a| = \sqrt{a^2}$ qui est lui-même égal à la valeur absolue de a. En conclusion le module étend la notion de valeur absolue des réels au complexes.
- Attention cependant, l'égalité $|x| = \pm x$ valable pour la valeur absolue d'un réel $x \in \mathbb{R}$ est FAUX en général pour les complexes.
- Même si la notation pour la valeur absolue et pour le module est identique, on veillera bien oralement à distinguer les deux notions, en particulier on ne parle pas de valeur absolue d'un complexe (lorsqu'il n'est pas réel).

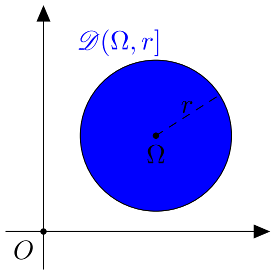
Proposition II.3

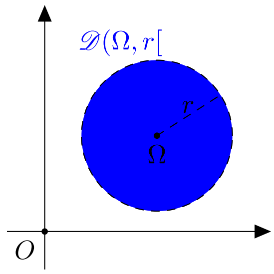
- Soit $M \in \mathscr{P}$ un point du plan d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $OM = |z|$.
- Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$ un vecteur du plan d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\|\vec{u}\| = |z|$.
- Soient $A\,(z_A)$ et $B\,(z_B)$ deux points du plan complexe alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$.

Cette formulation avec des complexes de la distance entre deux points nous permet de caractériser efficacement des objets géométriques. Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe et r un réel strictement positif.

- $\mathscr{C}_r = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z - \omega| = r \,\}$ est le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
- $\mathscr{D}(\Omega, r] = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z - \omega| \leqslant r \,\}$ est le disque fermé de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
- $\mathscr{D}(\Omega, r[= \{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z - \omega| \leqslant r \,\}$ est le disque ouvert de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r.
- Pour $\Omega'(\omega')$ un autre point du plan complexe, $\{\, z \in \mathbb{Z} \mid |z - \omega| = |z - \omega'| \,\}$ est la médiatrice du segment $[\Omega\Omega']$.







Exemple 9 : Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan complexe $M(z)$ tel que l'affixe z vérifie $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

Proposition II.4

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|zz'| = |z|\,|z'|$
4. si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
6. $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Démonstration.

1. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors on peut écrire $-z = a' + ib'$ avec $a' = -a$ et $b' = -b$. Donc $|-z| = \sqrt{(a')^2 + (b')^2} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. De même $\overline{z}$ peut s'écrire $\overline{z} = a'' + ib''$ avec $a'' = a$ et $b'' = -b$. Donc $|\overline{z}| = \sqrt{(a'')^2 + (b'')^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
2. Procédons par double implication. Si $z = 0 = 0 + i0$, il est clair que $|z| = 0$. Réciproquement, si $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ alors en élevant au carré, $a^2 + b^2 = 0$. Or $b^2 \geqslant 0$, donc $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2 = 0$. Donc par encadrement, $a^2 = 0$ et $a = 0$. En reprenant l'égalité $a^2 + b^2 = 0$, cela implique également que $b = 0$.
3. Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$, avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$. Puisque $zz' = aa' - bb' + i\,(ab' + a'b)$, on en déduit que
$$\begin{aligned}
|zz'| &= \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} \\
&= \sqrt{(aa')^2 - 2aa'bb' + (bb')^2 + (ab')^2 + 2aa'bb' + (a'b)^2} \\
&= \sqrt{a^2\left[(a')^2 + (b')^2\right] + b^2\left[(b')^2\,(a')^2\right]} \\
&= \sqrt{a^2\,|z'|^2 + b^2\,|z'|^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)\,|z'|^2} \\
&= \sqrt{|z|^2\,|z'|^2}.
\end{aligned}$$
Or $|z|$ et $|z'|$ sont deux réels positifs, donc, $\sqrt{|z|^2\,|z'|^2} = |z|\,|z'|$ et on conclut que $|zz'| = |z|\,|z'|$.
4. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$. D'après le point précédent, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z\frac{1}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right|$. Il nous reste donc à montrer que
$$\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}.$$
Or $\left|\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{\overline{z'}}{z'\overline{z'}}\right|$. Donc en appliquant la Proposition II.2, on obtient $\left|\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{\overline{z'}}{|z'|^2}\right| = \left|\overline{z'}\right|\left|\frac{1}{|z'|^2}\right|$. Or $\frac{1}{|z'|^2}$ est un réel positif, donc son module est également sa valeur absolue et est égal à lui-même : $\left|\frac{1}{|z'|^2}\right| = \frac{1}{|z'|^2}$. Ainsi, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \left|\overline{z'}\right|\frac{1}{|z'|^2}$. En utilisant le point 1, on obtient que $\left|\frac{1}{z'}\right| = |z'|\frac{1}{|z'|^2} = \frac{1}{|z'|}$. Et finalement $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right| = |z|\frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$.
5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On sait que $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$. Or $\mathrm{Im}(z)^2 \geqslant 0$, donc $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \geqslant \mathrm{Re}(z)^2$. Par croissance de la fonction racine carrée, $|z| \geqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)|$.
6. Idem au point précédent.

$\square$

Exemple 10 : Déterminer le module du complexe $\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^9}{(1-i)^7}$.

Remarques 11 :

- L'application 6 peut se reformuler de la façon suivante :
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$
- Les points 3 et 4 de la proposition précédente signifient que le module est compatible avec le produit et l'inverse. Cependant le module **N'est PAS** compatible avec l'addition comme le montre la proposition suivante.

Proposition II.5

1. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$
2. **(Inégalité triangulaire)** Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$||z| - |z'|| \leqslant |z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
3. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z = 0$ ou il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $z' = \lambda z$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

Démonstration.

1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ deux complexes. D'après la Proposition II.2, on écrit
$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z') \times \overline{z+z'} \\ &= (z+z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} + |z'|^2. \end{aligned}$$
Or si l'on pose $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ avec $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$, on constate que
$$\begin{aligned} z\overline{z'} + z'\overline{z} &= (a+ib)(a'-ib') + (a'+ib')(a-ib) \\ &= aa' - iab' + ia'b + bb' + aa' - ia'b + iab' + bb' \\ &= 2(aa' + bb'). \end{aligned}$$
Or $z\overline{z'} = (a+ib)(a'-ib') = aa' + bb' - iab' + ia'b$. et donc
$$z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2\text{Re}\left(z\overline{z'}\right).$$
Ainsi, on peut conclure que
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$
2. Commençons par montrer que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. D'après le point précédent on sait que $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$. Or d'après le point 5 de la Proposition II.4, $\text{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|\text{Re}\left(z\overline{z'}\right)\right| \leqslant \left|z\overline{z'}\right| = |zz'|$. D'où,
$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$
Par croissance de la fonction racine carrée et positivité des termes considérés, on conclut que $|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$. Pour la seconde inégalité, on écrit que $|z| = |z+z'-z'| \leqslant |z+z'| + |-z'| = |z+z'| + |z'|$. Donc $|z| - |z'| \leqslant |z+z'|$. De même (ou par symétrie des hypothèses sur z et z'), on montre que $|z'| - |z| \leqslant |z+z'|$ et finalement, $||z| - |z'|| \leqslant |z+z'|$.
3. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ deux complexes tels que $|z+z'| = |z| + |z'|$. En élevant au carré, on obtient
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2.$$

Donc d'après le point 1,

$$|z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,|zz'| + |z'|^2\,.$$

Ainsi, $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = |zz'| = \left|z\overline{z'}\right|$. En élevant au carré, on obtient que $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)^2 = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)^2 + \mathrm{Im}\left(z\overline{z'}\right)^2$ et donc $\mathrm{Im}\left(z\overline{z'}\right) = 0$. De cette façon, $z\overline{z'} = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \left|z\overline{z'}\right|$. Donc $r = z\overline{z'}$ est un réel positif.
Si $z = 0$ on obtient la conclusion voulue.
Si $z \neq 0$, on note alors que $\overline{z'} = \frac{r}{z} = \frac{r}{|z|^2}\overline{z} = \lambda\overline{z}$, avec $\lambda = \frac{r}{|z|^2} \in \mathbb{R}_+$ et finalement en passant au conjugué $z' = \lambda z$.

4. On considère la proposition $P(n) : (\forall\,(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad |z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|)$. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.
Initialisation. Pour $n = 1$, on a naturellement pour tout complexe $z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_1| \leqslant |z_1|$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie et posons $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire avec $Z = z_1 + \cdots + z_n$ et z_{n+1} :

$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| = |Z + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}|\,.$$

Or par l'hypothèse de récurrence $P(n)$, $|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$. D'où

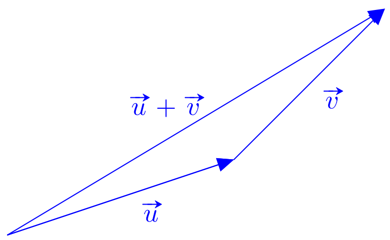
$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|\,.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et la propriété est héréditaire.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\forall\,(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|\,.$$

□

Interprétation géométrique. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan d'affixe z et z' respectivement. L'inégalité $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ se traduit par $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, c'est à dire que la longueur d'un côté d'un triangle (ici $\|\vec{u} + \vec{v}\|$) est inférieur à la somme de longueurs de deux autres côtés du triangle ($\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$).



II.2 Les complexes de module 1

Définition II.6

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}\,.$$

Géométriquement $\mathbb{U}$ est dans le plan complexe le cercle de centre O et de rayon 1.

Proposition II.7

L'ensemble $\mathbb{U}$ muni du produit $\times$ est un groupe commutatif car l'élément neutre 1 est dans $\mathbb{U}$ et l'ensemble est stable par produit et passage à l'inverse :

- $1,\ -1,\ i,\ -i \in \mathbb{U}$.
- $\forall z \in \mathbb{U}, \quad z\overline{z} = |z|^2 = 1$
- $\forall\,(z, z') \in \mathbb{U}^2, \quad zz' \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, \quad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U},\ -z \in \mathbb{U}$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{U}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $|z|^2 = a^2 + b^2$. Donc par la Proposition V.4 du chapitre 2, on sait qu'il existe un unique $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$ Ainsi, sans surprise, il est possible de paramétrer l'ensemble $\mathbb{U}$ de la même façon que le cercle trigonométrique.

Proposition II.8

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) \mid \theta \in [0; 2\pi[\}.$$

Exemple 12 : Donner le paramétrage de 1, i, -1, $-i$. Quelle est la forme algébrique du complexe de module 1 de paramètre $\theta = -\frac{\pi}{3}$?

Définition II.9

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit **l'exponentielle complexe** sur $i\mathbb{R}$ par

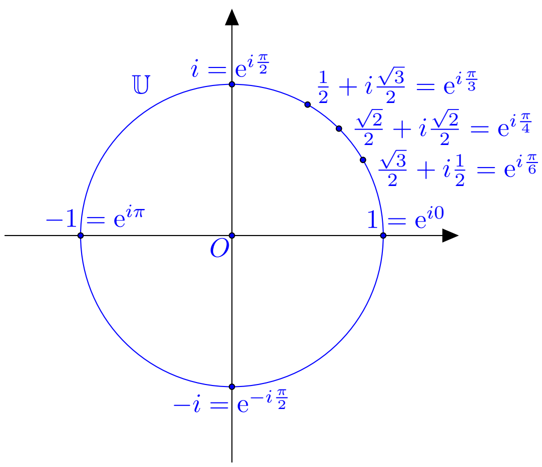
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Remarques 13 :

- Bien que l'on ai pris la même notation que pour l'exponentielle réelle, vous constatez que ce n'est pas la même définition. Nous allons vérifier par la suite que cette confusion des notations est valide car l'exponentielle complexe va vérifier les mêmes propriétés et étendre l'exponentielle réelle.
- Avec cette notation, la Proposition II.9, peut se reformuler de la façon suivante :

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in [0; 2\pi[\right\}.$$

- On retrouve sur le cercle les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques :



Proposition II.10

1. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,
$$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi.$$
2. Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,
$$\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'}.$$
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

Démonstration.

1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Par définition de l'exponentielle complexe,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} &\Leftrightarrow \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta') + i\sin(\theta') \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{cases}. \end{aligned}$$

Et d'après la Proposition V.3 du chapitre 2,

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi.$$

2. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. En utilisant les formules trigonométriques,

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + i\cos(\theta')\sin(\theta) \\ &= \cos(\theta)\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] + i\sin(\theta)\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] \\ &= \left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] \\ &= e^{i\theta} e^{i\theta'}. \end{aligned}$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Toujours avec les formules trigonométriques,

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

De plus on a vu dans la Proposition II.7, que si $z \in \mathbb{U}$, alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$. Donc $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

□

Proposition II.11 (Formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Exercice !

□

Application 14 : Factorisation de sommes d'exponentielles.

- Soit $t \in \mathbb{R}$ en appliquant la méthode de l'angle moitié à $1 + e^{it}$ on obtient une expression factorisée :

$$1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}\right) = 2\,e^{i\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

De même,

$$1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right) = -2i\,e^{i\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

- On peut étendre le principe. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\,e^{-i\frac{\theta+\phi}{2}}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi-\theta}{2}}\right) = 2\,e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$e^{i\theta} - e^{i\phi} = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\,e^{-i\frac{\theta+\phi}{2}}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} - e^{i\frac{\phi-\theta}{2}}\right) = 2i\,e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

- On peut alors retrouver les formules trigonométriques de factorisation : pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2} + \frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2} \\ &= \frac{e^{ip} + e^{iq}}{2} + \frac{e^{-ip} + e^{-iq}}{2} \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}}\,\frac{e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}}{2} + e^{-i\frac{p+q}{2}}\,\frac{e^{i\frac{q-p}{2}} + e^{i\frac{p-q}{2}}}{2} \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) + e^{-i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= \left(e^{i\frac{p+q}{2}} + e^{-i\frac{p+q}{2}}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right). \end{aligned}$$

Retrouver de même les autres formules trigonométriques de factorisation.

Proposition II.12 (Formules de Moivre)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration. Exercice ! □

Exemple 15 : Soit $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer z^{100}.

Application 16 : Linéarisation. Grâce à cette propriété, il devient plus aisée de linéariser certaines expressions trigonométriques. Par exemple pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^3 + 3\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^2 \mathrm{e}^{-i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{i\theta}\left(\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\mathrm{e}^{3i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{2i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-2i\theta} + \mathrm{e}^{-3i\theta}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{e}^{3i\theta} + \mathrm{e}^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\right].
\end{aligned}$$

II.3 L'exponentielle complexe

On considère connue la fonction exponentielle sur les réels et nous l'avons définie sur $i\mathbb{R}$ dans la propriété II.9. Nous allons maintenant voir comment étendre cette fonction sur l'ensemble des complexes.

Définition II.13

On appelle **fonction exponentielle complexe** la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Im}(z)} \end{array}$$

Remarques 17 :

- Autrement dit, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a\left(\cos(b) + i\sin(b)\right) = \mathrm{e}^a\cos(b) + i\,\mathrm{e}^a\sin(b).$$

- D'après le point précédent, il est évident que $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^z\right) \neq \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ en général et de même pour la partie imaginaire.
- La fonction exponentielle complexe étend celle définie sur les réelles ou les imaginaires pures : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{a+i0} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{i0} = \mathrm{e}^a$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{0+i\theta} = \mathrm{e}^0\,\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}$.

Proposition II.14

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z' \in \mathbb{C}$,

1. $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^z\right) = \mathrm{e}^a\cos(b)$
2. $\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^z\right) = \mathrm{e}^a\sin(b)$
3. $\left|\mathrm{e}^z\right| = \mathrm{e}^a$
4. $\mathrm{e}^z \neq 0$
5. $\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$
6. $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$
7. $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^z\right)^p = \mathrm{e}^{pz}$
8. $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.
9. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z' + 2ik\pi$.

Démonstration.

1. Puisque pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\cos(b) + i\,\mathrm{e}^a\sin(b)$, le résultat est immédiat.
2. Idem.

3. $|e^z| = |e^a e^{ib}| = |e^a| |e^{i\theta}| = e^a$.
4. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = 0$, alors $|e^z| = e^a = 0$ ce qui est absurde car l'exponentielle réelle est toujours strictement positive donc $e^z \neq 0$.
5. Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$, avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. On a, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle et la Proposition II.10,
$$e^z e^{z'} = e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'} e^{i\left(b+b'\right)} = e^{\left(a+a'\right)+i\left(b+b'\right)} = e^{z+z'} .$$
6. Puisque l'exponentielle complexe ne s'annule jamais, on peut prendre son inverse. De plus, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle et la Proposition II.10, pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^a e^{ib}} = \frac{1}{e^a}\frac{1}{e^{ib}} = e^{-a} e^{-ib} = e^{-a-ib} = e^{-z} .$$
Ce résultat pouvait aussi se déduire du point précédent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. Donc en divisant cette égalité par e^z, on obtient $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.
7. Deux méthodes. Soit on démontre le résultat par récurrence sur les entiers naturels puis à l'aide du point précédent, on l'étend sur l'ensemble des entiers relatifs. Soit on utilise les propriétés de l'exponentielle réelle et la formule de Moivre : pour tout $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $p \in \mathbb{Z}$, $(e^z)^p = \left(e^a e^{ib}\right)^p = (e^a)^p \left(e^{ib}\right)^p = e^{pa} e^{ipb} = e^{pa+ipb} = e^{p(a+ib)} = e^{ipz}$.
8. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on écrit $\overline{e^z} = \overline{e^a e^{ib}} = \overline{e^a}\,\overline{e^{ib}} = e^a e^{-ib} = e^{a-ib} = e^{\overline{z}}$.
9. Soient $z = a+ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a'+ib' \in \mathbb{C}$, avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tels que $e^z = e^{z'}$. Alors, par les points précédents, $e^z e^{-z'} = 1$ et donc $e^{z-z'} = 1$. En passant au module, on obtient que $\left|e^{z-z'}\right| = e^{a-a'} = 1$. Or l'unique antécédent de 1 par l'exponentielle réelle est 0, donc $a - a' = 0$ et ainsi $a = a'$. Reprenons alors l'égalité $e^{z-z'} = 1$ qui implique alors que $e^{i\left(b-b'\right)} = 1$. Ainsi, par la Proposition II.10, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = b'+2k\pi$. En conclusion, $z = a + ib = a' + i(b' + 2k\pi) = z' + 2ik\pi$.

□

Exemple 18 : Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

II.4 Argument d'un nombre complexe

Proposition II.15

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que
$$z = r\,e^{i\theta} .$$
De plus pour tout $(r, r') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,
$$z = r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = r' = |z| \text{ et } \theta \equiv \theta' \ [2\pi].$$

Démonstration. Existence. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Puisque $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, par la Proposition II.8, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ et donc cela démontre l'existence d'un couple $(r = |z|, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\,e^{i\theta}$.
Unicité. Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $(r, r') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$z = r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} .$$
En passant au module, il est clair que $|z| = |r| = |r'|$. Or $r \geqslant 0$ et $r' \geqslant 0$, donc $|z| = r = r'$. De plus, on en déduit que $r\,e^{i\theta} = r\,e^{i\theta'}$ et donc $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. D'après la Proposition II.10, on conclut que $\theta \equiv \theta'$ [2π].

□

Définition II.16

- Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|\,e^{i\theta}$. Le réel θ est dit être **un argument** de z et on note $\theta = \arg(z)$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'écriture $z = |z|\,e^{i\arg(z)}$ est appelée **la forme polaire** ou **la forme trigonométrique** de z.

Remarques 19 :

- D'après la proposition tout complexe non nul possède un argument mais cet argument n'est pas unique. Si θ est un arguement de z alors $\arg(z+2k\pi)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, l'est également. Il est dit unique à 2π près. On peut également affirmer que tout complexe non nul admet une infinité d'arguments.
- On ne parle pas de la forme polaire ni de l'argument du complexe 0.

Exemple 20 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme polaire du complexe $z = 1 + \mathrm{e}^{i\theta}$.

Proposition II.17

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta = \arg(z)$ alors,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Application 21 : Déterminer la forme polaire de $\sqrt{3} + i$.

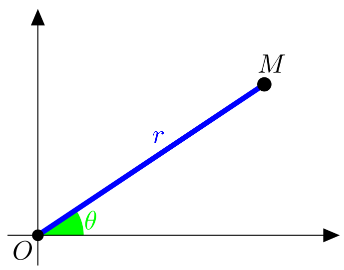
Proposition II.18

1. Pour tout $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$,
$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,
$$\arg(z^n) = n \arg(z).$$
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}(z).$$

Remarque 22 : Le module et l'argument sont compatibles avec le produit et le passage à l'inverse. La forme trigonométrique est donc recommandée pour le calcul d'un produit ou d'un quotient de complexes tandis qu'en général (attention aux exceptions toujours possibles) la forme algébrique se prête mieux au calcul d'une somme ou d'une différence.

Interprétation géométrique. La forme polaire d'un complexe z renvoie aux coordonnées polaires du point M d'affixe z. Si $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors

- (rappel) le module de z est la distance de M à l'origine : $r = OM$,
- l'argument de z est une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.



Proposition II.19

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan d'affixe z, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i}, \vec{u}\right)$.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixe z et z' respectivement, alors
$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)\ [2\pi].$$
3. Soient $A\,(z_A)$, $B\,(z_B)$ et $C\,(z_C)$ trois points du plan complexe, alors
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi].$$

Démonstration.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe z. Posons M le point du plan complexe tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Alors M a pour affixe z et donc $\arg(z) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{i}, \vec{u}\right)\ [2\pi]$.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan d'affixe z et z' respectivement. On a
$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \left(\vec{u}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \vec{v}\right) \equiv \left(\vec{i}, \vec{v}\right) - \left(\vec{i}, \vec{u}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right)\ [2\pi].$$
3. Soient $A\,(z_A)$, $B\,(z_b)$ et $C\,(z_C)$ trois points du plan complexe. Puisque $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A$, le résultat est un cas particulier du point précédent.

□

III Equations algébriques complexes

III.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition III.1

Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle **racine carrée** de z tout complexe $\omega \in \mathbb{C}$ vérifiant $\omega^2 = z$.

Proposition III.2

Tout complexe non nul $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, admet exactement deux racines carrées ω_1 et ω_2 données par
$$\omega_1 = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\omega_1.$$

Démonstration. **Analyse.** Soient $z = r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Puisque $z \neq 0$, il est clair que $\omega \neq 0$. Donc il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $\omega = \rho\,e^{i\varphi}$ et l'égalité $\omega^2 = z$ se traduit par $\rho^2\,e^{2i\varphi} = r\,e^{i\theta}$. D'après la Proposition II.15, on en déduit que $\rho^2 = r$ et $2\varphi \equiv \theta\ [2\pi]$. Puisque ρ est un réel strictement positif, on a $\rho = \sqrt{r}$. De plus $\varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [\pi]$ donc $\varphi \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$ ou $\varphi \equiv \frac{\theta}{2} + \pi\ [2\pi]$. On en déduit qu'il existe (au plus) deux solutions :
$$\omega_1 = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\omega_1.$$

Synthèse. On vérifie aisément que les complexes données ci-dessous sont solutions, c'est-à-dire que $\omega_1^2 = z$ et $\omega_2^2 = z$.

□

Exemple 23 : Déterminer les racines carrées de $1 - i$.

Remarques 24 :

- Le complexe 0 admet une unique racine carrée qui est 0 naturellement.
- Si $z = a > 0$, on retrouve la racine carrée classique et son opposée : $a = a\,e\,i0$ donc ses racines sont $\omega_1 = \sqrt{a}\,e^{i\frac{0}{2}} = \sqrt{a}$ et $\omega_2 = \sqrt{a}\,e^{i\pi} = -\sqrt{a}$.
- Si $z = a < 0$, $a = |a|\,e^{i\pi}$ donc ses racines sont $\omega_1 = \sqrt{|a|}\,e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{a}$ et $\omega_2 = \sqrt{a}\,e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{a}$.

- Contrairement aux réels positifs, pour les complexes il n'existe pas de racine « privilégiée ». La notation $\sqrt{\ }$ n'a donc aucun sens pour un complexe en général et est donc STRICTEMENT réservée aux réels positifs.

Racines carrées sous forme algébrique. Bien qu'en règle générale la forme trigonométrique semble toute désignée pour la recherche des racines, il est possible de devoir le faire sous forme cartésienne. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^2 = z$. Puisque $\omega^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, l'unicité de la forme algébrique implique que

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy. \end{cases}$$

En considérant le module, on peut ajouter une équation : $|\omega|^2 = |z| \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. En résumé,

$$\begin{cases} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \\ \sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2. \end{cases}$$

En couplant les lignes 1 et 3, on obtient $x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$ et $y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$. De plus $b = 2xy$ permet de déterminer le signe de x et de y.

- Si $b \geqslant 0$, x et y sont de même signe et donc

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}}. \end{cases}$$

  Ce qui nous donne bien deux solutions.

- Si $b \leqslant 0$, x et y sont de signe différent et donc

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{|z|+\mathrm{Re}(z)}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{|z|-\mathrm{Re}(z)}{2}}. \end{cases}$$

  Ce qui nous donne encore une fois deux racines.

Exemple 25 : Déterminer les racines carrées de $1 - i$ et à l'aide des solutions trouvées dans l'exemple 23 en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

III.2 Equations complexes du second degré

Définition III.3

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ trois complexes avec $a \neq 0$ et considérons le trinôme $az^2 + bz + c$. Une équation du second degré est la résolution de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{E}$$

On appelle racine de (E) toute solution de (E). On définit Δ **le discriminant** associé à (E) par

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition III.4

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ trois complexes avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant et δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ : $\delta^2 = (-\delta)^2 = \Delta$.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$ admet une unique solution

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Démonstration. Avec les notations de la proposition, on écrit le trinôme sous forme canonique

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

- Si $\Delta=0$, alors
$$az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$$
et l'équation $az^2+bz+c=0$ a pour unique solution $z_0=\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta\neq 0$, alors
$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right)\\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\\ &= a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$
et on conclut que les solutions de $az^2+bz+c=0$ sont $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$.

□

Exemple 26 : Déterminer les racines complexes de $z^2+(1-i)z+4+7i$.

Proposition III.5 (Relations racines-coefficients)

Soient $p\in\mathbb{C}$ et $s\in\mathbb{C}$. Les complexes $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ (éventuellement confondus) sont solutions de l'équation $z^2-sz+p=0$ si et seulement si

$$\begin{cases} z_1+z_2=s\\ z_1z_2=p. \end{cases}$$

Exemple 27 : A l'aide d'une racine « évidente » de l'équation $3iz^2-(9+6i)\,z+18=0$ déterminer toutes les solutions de cette équation.

Exemple 28 : Factoriser l'expression $z^2+(3+2i)\,z+6i$, $z\in\mathbb{C}$.

Proposition III.6

Si a, b et c sont trois **réels**, avec $a\neq 0$, et si ξ est une racine de l'équation d'inconnu $z\in\mathbb{C}$,

$$az^2+bz+c=0$$

alors $\overline{\xi}$ est également une racine de $az^2+bz+c=0$ (éventuellement confondue avec ξ).

Exemple 29 : Factoriser dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^4-5x^3+7x-5x+6$, $x\in\mathbb{R}$.

III.3 Racines n-ième de l'unité

Définition III.7

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- On appelle **racine n-ième de l'unité** tout complexe $\omega\in\mathbb{C}$ tel que $\omega^n=1$.
- On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

Proposition III.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $\mathbb{U}$, c'est-à-dire vérifie les propriétés suivantes.

1. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est inclus dans $\mathbb{U}$.
2. L'élément neutre de la multiplication 1 appartient à $\mathbb{U}_n$.
3. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est stable par produit : $\forall (\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n^2,\ \omega\omega' \in \mathbb{U}_n$
4. Tout élément de $\mathbb{U}_n$ est inversible dans $\mathbb{U}_n$: $\forall \omega \in \mathbb{U}_n,\ \omega^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, alors $|\omega^n| = |\omega|^n = 1$. Or $|\omega| \geqslant 0$, donc $|\omega| = 1$ et donc $\omega \in \mathbb{U}$.
   Exercice : démontrer que si $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^n = 1$, alors $x = 1$. Pensez à utiliser la contraposée.
2. Evident.
3. Soit $(\omega, \omega') \in \mathbb{U}_n^2$, alors $(\omega\omega')^n = \omega^n (\omega')^n = 1$ et donc $\omega\omega' \in \mathbb{U}_n$.
4. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$, $\left(\frac{1}{\omega}\right)^n = \frac{1}{\omega^n} = 1$.

□

Remarque 30 : Puisque $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}$, on en déduit que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a $\overline{\omega} = \omega^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

Proposition III.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est donné par :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n$. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{i\theta}$. Alors par la formule de Moivre, $\omega^n = \mathrm{e}^{in\theta} = 1$. Donc $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$, et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Réciproquement tout complexe $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$ appartient à $\mathbb{U}_n$. On a donc montré que

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'oeil attentif aura remarqué que ce n'est pas encore la conclusion de la proposition. Il est clair que

$$\left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} \subseteq \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Démontrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega \in \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. En effectuant la division euclidienne de k par n, on sait qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \dots, n-1\}$ tel que $k = qn + r$. Donc

$$\omega = \mathrm{e}^{i\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{n}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{2r\pi}{n}},$$

où $r \in \{0, \dots, n-1\}$ et donc $\omega \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$. En conclusion,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \ \middle|\ k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

□

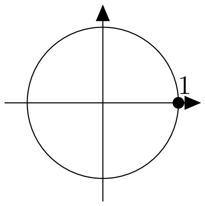
Définition III.10

On note j le complexe

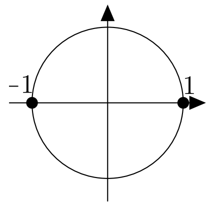
$$j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemple 31 :

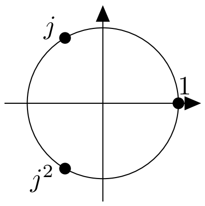
- Pour $n=1$, $\mathbb{U}_1=\{1\}$.



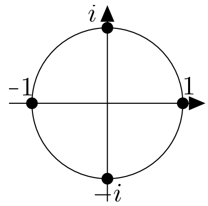
- Pour $n=2$, $\mathbb{U}_2=\{1,-1\}$.



- Pour $n=3$, $\mathbb{U}_3=\{1,j,j^2\}$.



- Pour $n=4$, $\mathbb{U}_4=\{1,i,-1,-i\}$.



Remarques 32 :

- Les racines n-ième de l'unité découpent le cercle unité en n parts égales.
- A partir d'une racine n-ième de l'unité, on en déduit toutes les autres par des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Proposition III.11

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Le complexe $\omega\in\mathbb{C}$ est une racine n-ième de l'unité différente de 1 si et seulement si
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0.$$
2. Pour tout $z\in\mathbb{C}$,
$$z^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(z-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)=(z-1)\left(z-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z-\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{n}}\right)\cdots\left(z-\mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right).$$

Démonstration.

1. Comme dans $\mathbb{R}$, on démontre (exercice!) que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 1$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}.$$
Donc $z=\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}\quad\Leftrightarrow\quad z\neq 1$ et $1-z^n=0\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{k=0}^{n-1}z^k=0$.
2. C'est la forme factorisée du polynôme X^n-1 dont les n racines complexes sont données par les racines n-ième de l'unité. Cf le chapitre ultérieur sur les polynômes.

□

Exemple 33 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $1+2z+2z^2+\cdots+2z^{n-1}+z^n=0$ d'inconnu $z\in\mathbb{C}$.

Définition III.12

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$. On appelle **racine n-ième de z** tout complexe $\omega\in\mathbb{C}$ tel que
$$\omega^n=z.$$

Proposition III.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout complexe non nul $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, admet exactement n racines n-ième distinctes données par

$$\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que $\omega^n = z$. Il est clair que $\omega \neq 0$ donc il existe $(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $\omega = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$. L'équation $\omega^n = z$ implique que $|\omega|^n = \rho^n = |z| = r$. Or ρ est un réel strictement positif. Donc $\rho = \sqrt[n]{r}$. Par ailleurs, $\omega^n = z$ implique que

$$\rho^n\left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n \mathrm{e}^{-i\theta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{i\left(\varphi-\frac{\theta}{n}\right)}\right)^n = 1.$$

Autrement dit le complexe $\mathrm{e}^{i\left(\varphi-\frac{\theta}{n}\right)}$ est une racine n-ième de l'unité. Donc il existe $k \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $\varphi-\frac{\theta}{n} = \frac{2k\pi}{n}$. Finalement, le complexe ω s'écrit

$$\omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

□

Exemples 34 :

- Déterminer les racines 3-ième de $\frac{1-i}{4}$.
- Déterminer les racines 6-ième de $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$.

Corollaire III.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient z_1 et z_2 deux racines n-ième d'un même complexe non nul z alors il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel que $z_2 = \omega z_1$.
2. Soit z_1 une racine n-ième d'un complexe non nul z alors les racines n-ième de z sont données par

$$z_1\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0,\dots,n-1\}.$$

Démonstration.

1. Puisque $z \neq 0$, alors $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$ et il est facile de voir que $\frac{z_1}{z_2}$ est une racine n-ième de l'unité.
2. Si z_2 est une autre racine n-ième, d'après le point précédent, on sait qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ tel que $z_2 = z_1\omega$. Comme $\omega \in \mathbb{U}_n$, il existe $k \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $z_2 = z_1\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

□

Exemple 35 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les solutions de l'équation $z^{2n+1} + 1 = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$.

IV Applications géométriques

IV.1 Alignement, orthogonalité

Proposition IV.1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan complexe d'affixe z et z' respectivement.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z}{z'} \in i\mathbb{R}$.

Soient $A\,(z_A)$, $B\,(z_B)$ et $C\,(z_C)$ trois points distincts du plan complexe.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \in \mathbb{R}$.
2. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration. Ce sont des conséquences directes de la Proposition II.19.

□

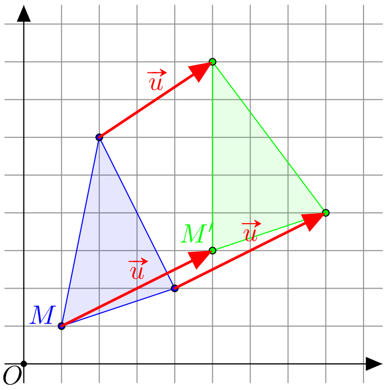
Exemple 36 : Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points du plan complexe. Démontrer que $M(z)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si

$$|z|^2 - \mathrm{Re}\left(\overline{a+b}z\right) + \mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) = 0.$$

IV.2 Transformations du plan

Définition IV.2

La translation de vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}}$ est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Proposition IV.3

Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application

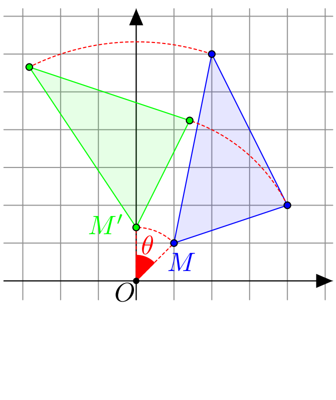
$$\tau_{\vec{u}} : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z+b. \end{array}$$

est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

Démonstration. Soient $M(z)$ un point du plan complexe, $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b et M' le point d'affixe $\tau_{\vec{u}}(z) = z+b$. Alors $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z+b-z=b$. Donc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc $\tau_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. □

Définition IV.4

- **La rotation** d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre O est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $OM = OM'$ et tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta$.
- **La rotation** d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de centre $\Omega \in \mathscr{P}$ est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\Omega M = \omega M'$ et tel que $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.



Proposition IV.5

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application

$$r_\theta : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z. \end{array}$$

est la rotation de centre O et d'angle θ.

- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe. L'application

$$r_{\theta,\Omega} : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega. \end{array}$$

est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

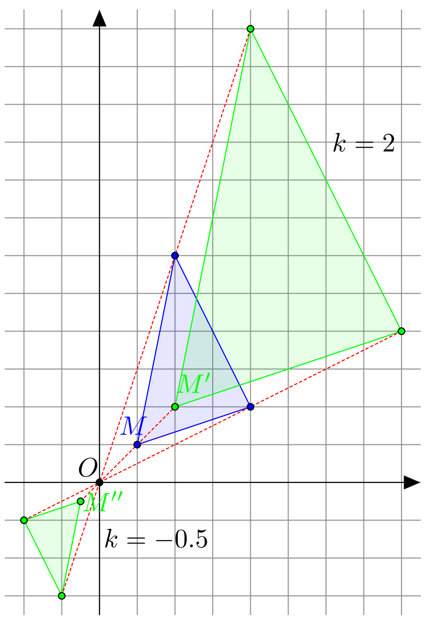
Démonstration.

- Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $M(z)$ un point du plan complexe et M' le point d'affixe $r_\theta(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z$. Supposons $z \neq 0$ (sinon le résultat est trivial). Alors $OM' = \left|\mathrm{e}^{i\theta} z\right| = |z| = OM$ et $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \arg\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} z}{z}\right) \equiv \arg\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$. Donc r_θ est la rotation de centre O et d'angle θ. b.
- Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega(\omega)$ et $M(z)$ deux points du plan complexe. Posons M' le point d'affixe $z' = \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.
  Premier cas, $M = \Omega$ id est $z = \omega$. Alors $z' = \omega$ et donc $M' = M = \Omega$ est un point fixe de l'application.
  Second cas, $M \neq \Omega$, alors $\Omega M' = |z'-\omega| = \left|\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)\right| = |z-\omega| = \Omega M$. De plus $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)}{z-\omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.
  En conclusion, $r_{\theta,\Omega}$ est la rotation d'angle θ et de centre Ω.

$\square$

Définition IV.6

- **L'homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de centre O est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$.
- **L'homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de centre $\Omega \in \mathscr{P}$ est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M'}$.



Proposition IV.7

- Soit $k \in \mathbb{R}$. L'application

$$h_k : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto kz. \end{array}$$

est l'homothétie de centre O et de rapport k.
- Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe. L'application

$$h_{k,\Omega} : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto k(z-\omega)+\omega. \end{array}$$

est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Exemple 37 : Soit $A(a)$ un point du plan complexe. Donner l'expression complexe de la symétrie centrale de centre A.

Définition IV.8

On appelle **similitude directe** toute application du plan définie par

$$s : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto az+b, \end{array}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Proposition IV.9

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $a \neq 0$ et s la similitude directe définie par $s(z) = az+b$, $z \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u(b)}$.
- Si $a \neq 1$ alors il existe un unique point $\Omega(\omega)$ laissé fixe par s d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. La similitude s s'écrit alors $s(z) = a(z-\omega)+\omega$ et est la composée
  - d'une rotation $r_{\theta,\Omega}$ d'angle $\arg(a)$ et de centre Ω,
  - d'une homothétie $h_{k,\Omega}$ de rapport $|a|$ et de centre Ω.

  Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s(z) = h_{k,\Omega} \circ r_{\theta,\Omega}(z) = r_{\theta,\Omega} \circ h_{k,\Omega}(z)$.

Démonstration. Le premier point est évident, démontrons le second et supposons $a \neq 1$. Soit $\Omega(\omega)$ un point du plan complexe. On observe que

$$s(\omega) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad a\omega + b = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{b}{1-a}.$$

Donc s admet un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. On note alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s(z) = az+b = a\left(z - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} + b = a(z-\omega)+\omega$. Puisque $a \neq 0$, il existe $(k,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $a = k\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Posons $r_{\theta,\Omega}$ la rotation d'angle θ et de centre Ω et $h_{k,\Omega}$ l'homothétie de rapport k et de centre Ω. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$h_{k,\Omega} \circ r_{\theta,\Omega}(z) = h_{k,\Omega}\left(\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega\right) = k\left[\left(\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)+\omega\right)-\omega\right]+\omega = k\left[\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)\right]+\omega = a(z-\omega)+\omega.$$

Donc $h_{k,\Omega} \circ r_{\theta,\Omega} = s$ et de même on vérifie que $s = r_{\theta,\Omega} \circ h_{k,\Omega}$.

□

Proposition IV.10 (Rappel)

- La symétrie d'axe (Ox) s'écrit

$$\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{array}$$

- La symétrie d'axe (Oy) s'écrit

$$\begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto -\overline{z} \end{array}$$

Leonhard EULER *(Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) fut un mathématicien extrêmement prolifique dont l'étendue de son oeuvre touchant à tous les domaines des mathématiques et la qualité de sa rédaction le désignent comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. De parents pauvres, Euler suivit des études secondaires à Bâle où les mathématiques ne sont pas enseignées. A l'âge de treize ans il entra à l'université pour étudier la philosophie et le droit. Ayant pris des cours de mathématiques auprès d'un étudiant, Jean Bernoulli (frère de Jacques Bernoulli qui donna son nom à la variable aléatoire) remarqua ses aptitudes dans ce domaine et lui donna des cours particuliers tous les samedis. La Suisse offrant peu de possibilités pour une carrière de mathématicien, Euler décrocha une place à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg en 1727 grâce à l'appui de la famille Bernoulli.*
En 1733 il épouse la fille d'une artiste russe et aura par la suite 13 enfants. Euler fut réputé pour sa patience envers ses enfants et sa capacité à rédiger des articles tout en jouant avec eux. Après avoir fréquenté la cour de Frédéric le Grand en Prusse, il reviendra à un poste en Russie sur l'invitation de Catherine II. Une fièvre soudaine lui fit perdre l'usage de son oeil droit et devint complètement aveugle à l'âge de soixante quatre ans. Son flots de publications ne s'en trouva pas tari et grâce notamment à une mémoire colossale (il pouvait réciter les neuf mille vers de l'Enéide par coeur) il dicta inlassablement ses textes à ses fils et son valet. Il s'éteignit à l'âge de soixante-seize ans alors qu'il consommait paisiblement une tasse de thé avec ses amis.
Euler n'est pas à l'origine de grandes nouvelles théories mais aborda tous les domaines des mathématiques et en particulier l'analyse à laquelle il donnera un nouvel essor et la théorie des nombres. Il s'émerveilla devant la formule

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

qui relie les cinq nombres fondamentaux 0, 1, i, e *et* π.

« *Lisez Euler, c'est notre maître à tous.* »

Pierre-Simon de Laplace

Justifier l'égalité suivante : $8i = \infty$.

Lorsque vous composer un faux numéro vous pouvez entendre le répondeur suivant :
« -Le numéro que vous cherchez à joindre n'existe pas. Ce numéro étant imaginaire, veuillez tourner votre téléphone d'un quart de tour et réessayer. »