Chapitre V : Calculs dans $\mathbb{R}$

I Ensembles de base

Rappels

Soient a un élément, E et F deux ensembles.

- On dit que a **appartient** à E, noté $a \in E$ si a est un élément de l'ensemble E.
- On dit que F est un **sous-ensemble** de E ou est contenu dans E ou encore est inclus dans E, noté $F \subseteq E$ ou $F \subset E$, si tous les éléments de F appartiennent à E.
- $\{a\}$ désigne l'ensemble contenant uniquement l'élément a.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Remarques 1 :

- Si on utilise le même verbe contenir « E contient a » et « E contient F » pour dire que $a \in E$ et $F \subseteq E$, il ne faut cependant pas confondre l'appartenance et l'inclusion. On ne dit pas que F appartient à E ni que a est inclus dans E.
- Si $a \in E$ alors $\{a\} \subseteq E$ et réciproquement.
- L'inclusion peut se formaliser de la façon suivante : $F \subseteq E$ si et seulement si pour tout $a \in F$, on a $a \in E$.
- La négation de l'inclusion s'écrit $F \not\subseteq E$ et se traduit par l'existence d'UN élément $a \in F$ tel que $a \notin E$ (et non par le fait que tous les éléments de F ne sont pas dans E).
- Dans la définition d'un ensemble, il est possible de répéter plusieurs fois le même élément ou de modifier la place des éléments sans changer la définition l'ensemble : $\{a, b, c, d\} = \{a, c, d, b\} = \{b, a, c, a, d, a, a\}$ est le même ensemble contenant les éléments a, b, c et d.

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres positifs permettant de dénombrer, défini par :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}.$$

L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers naturels et de leurs opposés :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble des décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des entiers relatifs divisés par une puissance de 10 :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{k}{10^p} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il correspond à l'ensemble de nombre s'écrivant avec un nombre fini de chiffre derrière la virgule. Il est théoriquement moins utilisé que ses compères.

L'ensemble des rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

L'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, est un ensemble plus difficile théoriquement à construire (théorie hors programme). Intuitivement certains nombres que vous connaissez comme $\sqrt{2}$ ou π sont des nombres qui ne font pas partie des rationnels. Ils peuvent cependant être vus comme des limites de suites de rationnels. L'ensemble $\mathbb{R}$ est, pour le dire vite et de façon peu rigoureuse, l'ensemble des limites des suites de $\mathbb{Q}$ qui convergent.

L'ensemble des complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des couples de réels muni d'une multiplication particulière, voir le chapitre III.

Remarques 2 :

- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ contiennent un nombre infini d'éléments.
- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont strictement emboités dans cet ordre :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Remarque 3 : Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, on note $\mathbb{K}_+$ l'ensemble des nombres positifs ou nuls de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_-$ l'ensemble des nombres négatifs ou nuls de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^*$ l'ensemble des nombres non nuls de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_+^*$ l'ensemble des nombres strictement positifs de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_-^*$ l'ensemble des nombres strictement négatifs de $\mathbb{K}$.

II L'ordre dans $\mathbb{R}$

II.1 Propriétés élémentaires de la relation $\leqslant$

Proposition II.1

La relation $\leqslant$ entre les réels est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ car elle vérifie les trois propriétés suivantes.

- **Réflexive** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$.
- **Transitive** : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.
- **Antisymétrique** : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leqslant y$ et $y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$.

Cette relation d'ordre est une relation d'ordre **total**.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leqslant y)$ ou $(y \leqslant x)$.

Remarques 4 :

- On dit que $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné. C'est aussi le cas pour $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ ou $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ par exemple. Cependant l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas totalement ordonné.
- La relation $<$, définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y \iff (x \leqslant y$ et $x \neq y)$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.
- La relation $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

Proposition II.2 (compatibilité de $\leqslant$ et $<$ avec les opérations $+$ et $\times$)

Soient x, y et λ trois réels.

1. Si $x \leqslant y$ alors $x + \lambda \leqslant y + \lambda$.
2. Si $x < y$ alors $x + \lambda < y + \lambda$.
3. Si $x \leqslant y$ et si $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda x \leqslant \lambda y$.
4. Si $x < y$ et si $\lambda > 0$, alors $\lambda x < \lambda y$.
5. Si $x \leqslant y$ et si $\lambda \leqslant 0$, alors $\lambda x \geqslant \lambda y$.
6. Si $x < y$ et si $\lambda < 0$, alors $\lambda x > \lambda y$.

Remarques 5 :

- Ces propriétés sont élémentaires, vous devez les maitrisez parfaitement. Chacune des hypothèses est importante. Par exemple l'affirmation suivante « si $x < y$ et si $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda x < \lambda y$ » est FAUSSE !!
- En cas de doute dans des manipulations d'inégalités, ramenez-vous toujours à l'une des propositions ci-dessus. Par exemple l'implication $(x \leqslant y$ et $x' \leqslant y') \Rightarrow (x + x' \leqslant y + y')$ est-elle vraie ? Oui car si $x \leqslant y$ alors $x + x' \leqslant x' + y$. Si de plus $x' \leqslant y'$ alors $x' + y \leqslant y + y'$. Par transitivité de la relation $\leqslant$, on obtient $x + x' \leqslant y + y'$.

Exemple 6 : Montrer que si $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}_+$ sont quatre réels positifs tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$ alors $xx' \leqslant yy'$. Donner un contre-exemple à cette propriété lorsque les réels ne sont pas supposés positifs.

Proposition II.3 (compatibilité de $\leqslant$ et $<$ avec l'inverse)

Soient x et y deux réels.

1. Si $0 < x \leqslant y$ alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} > 0$.
2. Si $0 < x < y$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.
3. Si $x \leqslant y < 0$ alors $0 > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.
4. Si $x < y < 0$ alors $0 > \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.
5. Si $x < 0 < y$ alors $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$.

Remarque 7 : Du fait du dernier point de cette proposition, il est dangereux d'affirmer que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Il vaut mieux affirmer que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition II.4 (compatibilité de $\leqslant$ avec le carré)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x^2 \leqslant y^2 \qquad \iff \qquad -y \leqslant x \leqslant y.$$

II.2 Majorants,minorants

Définition II.5

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie (i.e. sous-ensemble) de $\mathbb{R}$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ deux réels.

- On dit que M majore A ou est **un majorant** de A si pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$a \in A \quad \Rightarrow \quad a \leqslant M.$$
- On dit que m minore A ou est **un minorant** de A si pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a
$$a \in A \quad \Rightarrow \quad m \leqslant a.$$

Exemples 8 :

- Le réel 12 est un majorant de l'intervalle $[0; 5[$.
- Tout entier négatif ou nul est un minorant de $\mathbb{N}$.
- Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'admettent ni majorant ni minorant.

Définition II.6

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que M majore A.
- On dit que A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que m minore A.
- On dit que A est **bornée** si elle est minorée et majorée.

Remarque 9 : Autrement dit A est bornée s'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $a \in A$, $m \leqslant a \leqslant M$.

Exemple 10 :

1. Ecrire une assertion traduisant le fait qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas majorée.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas majoré.

Définition II.7

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel.

- On dit que a est **le maximum** de A, ou encore que a est le plus grand élément de A, noté $\max(A)$, si a est un majorant de A ET si $a \in A$.
- On dit que a est **le minimum** de A, ou encore que a est le plus petit élément de A, noté $\min(A)$ si a est un minorant de A ET si $a \in A$.

Remarques 11 :

- Autrement dit a est un maximum de A si et seulement si $a \in A$ et pour tout $b \in A$, $b \leqslant a$.
- Tout ensemble ayant un maximum est nécessairement majoré (par ce maximum en particulier).
- Attention, tous les ensembles, même majorés, n'ont pas nécessairement de maximum. Par exemple $[0; 1]$ admet pour maximum 1 et pour majorant tous les réels supérieurs ou égaux à 1. Mais l'ensemble $[0; 1[$ n'a pas de maximum, bien qu'il soit majoré par tous les réels plus grand que 1.
- Le maximum d'un ensemble A, s'il existe est unique. En effet si a et a' sont deux maximums de A, alors puisque a est un maximum, on sait que pour tout $b \in A$, $b \leqslant a$. En prenant $b = a' \in A$, on en déduit que $a' \leqslant a$. Inversement puisque a' est un maximum de A et que $a \in A$, on a $a \leqslant a'$ et donc $a = a'$.
- Toutes les remarques ci-dessus ont leurs analogues pour le minimum.

Exemple 12 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Ecrire une assertion exprimant le fait que A ne possède pas maximum.

Exemple 13 :

1. Déterminer le minimum de $\{\, x - \sin(x) \mid x \in \mathbb{R}_+ \,\}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$. Démontrer que $\{\, S_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ est majorée.

II.3 Borne supérieure, borne inférieure

Définition II.8

Soit A un ensemble.

- Si l'ensemble A est majoré, on appelle **borne supérieure** de A, notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A, s'il existe.
- Si l'ensemble A est minoré, on appelle **borne inférieure** de A, notée $\inf(A)$, le plus grand des minorants de A, s'il existe.

Remarque 14 : Puisque, lorsqu'elle existe, la borne supérieure est un minimum (celui de l'ensemble des majorants), nécessairement la borne supérieure est unique. De même la borne inférieure, lorsqu'elle existe, est le maximum des minorants et est donc unique.

Exemple 15 : Montrer que si a est le maximum de A, alors a est la borne supérieure de A.

Théorème II.9 (admis)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque 16 : Ce théorème se démontre à l'aide de notions hors programme permettant la construction de $\mathbb{R}$. Notez que cette propriété est fausse dans $\mathbb{Q}$, où par exemple l'ensemble $\left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leqslant 2 \right\}$ est non vide, majoré mais n'admet pas de borne supérieure.

Exercice 17 : Démontrer le second point du théorème à l'aide du premier point.

Exemple 18 : On a $\sup([0;1[) = \sup([0;1]) = 1$.

Proposition II.10 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le réel a est la borne supérieure de A
2. Le réel a est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.
3. Le réel a est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in A$ tel que $a - \varepsilon < b$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : si $a = \sup(A)$ alors par définition a est le plus petit majorant de A. C'est donc bien un majorant de A. De plus pour tout $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < a$. Le réel $a - \varepsilon$ est donc strictement plus petit que le plus petit des majorants et n'est donc pas un majorant.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) : il s'agit juste de formaliser le fait que $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Or M est un majorant de A si et seulement si $\forall b \in A,\ b \leqslant M$. Par négation de cette affirmation, on obtient que $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant si et seulement $\exists b \in A,\ b > a - \varepsilon$.
(3) $\Rightarrow$ (1) : soit a un majorant de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in A$ tel que $a - \varepsilon < b$. Pour montrer que a est la borne supérieure de A, on va montrer qu'il est le plus petit des majorants. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que M soit un majorant de A et tel que $M < a$. Puisque $\varepsilon = a - M > 0$, on sait par hypothèse qu'il existe $b \in A$ tel que $M = a - \varepsilon < b$ ce qui contredit le fait que M soit un majorant c'est-à-dire le fait qu'il soit plus grand que tous les éléments de A et notamment de b. □

Proposition II.11 (Caractérisation de la borne inférieure)

Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un réel. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le réel a est la borne inférieure de A
2. Le réel a est un minorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A.
3. Le réel a est un minorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in A$ tel que $b < a + \varepsilon$.

Exemple 19 : Soit A et B deux parties non vide et majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

Démontrer que $A + B$ est majorée et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

II.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition II.12

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. L'ensemble I est **un intervalle** de $\mathbb{R}$ si pour tout $(a,b) \in I^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \Rightarrow \quad x \in I.$$

Remarques 20 :

- L'ensemble $\mathbb{R}^*$ par exemple n'est pas un intervalle car $(-1,1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$, pourtant $0 \notin \mathbb{R}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est la réunion de deux intervalles, deux demi-droites ouvertes : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- La définition d'un intervalle I peut également s'écrire également de la forme suivante : $\forall (a,b) \in I$, on a $[a;b] \subseteq I$.

Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont :

- l'ensemble vide $\emptyset$,
- l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a;b]$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, définis par
$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$
- les intervalles ouverts $]a;b[$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, définis par
$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $]a;b]$ et $[a;b[$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, définis respectivement par
$$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \qquad \text{et} \qquad [a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},$$
- les demi-droites fermées $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par
$$[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\},$$
- les demi-droites ouvertes $]a;+\infty[$ ou $]-\infty;a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par
$$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \qquad \text{et} \qquad]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que tous les ensembles précédents sont des intervalles. Réciproquement, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$,

- Si $I = \emptyset$, alors I est un intervalle. Supposons dans la suite que I est non vide.
- Si I n'est ni majoré ni minoré, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(u,v) \in I^2$ tel que $u < x < v$. Puisque I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on en déduit que $x \in I$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R} \subseteq I$. L'inclusion réciproque étant également vraie on a $I = \mathbb{R}$.
- Si I est borné, on note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Montrons que $]a;b[\subseteq I$. Soit $x \in]a;b[$. Puisque $x > a$, et que, par définition de la borne inférieure a est le plus grand des minorants de I, on en déduit que x n'est pas un minorant de I. Donc il existe $a' \in I$ tel que $x \geqslant a'$. De même, $x \leqslant b$ et b est le plus petit des majorants. Donc il existe $b' \in I$ tel que $x \leqslant b'$. Ainsi on a
$$a' \leqslant x \leqslant b' \qquad (a',b') \in I^2.$$
Or l'ensemble I est un intervalle donc $x \in I$. Tout élément de $]a;b[$ est donc dans I :
$$]a;b[\subseteq I.$$
De plus, a étant un minorant de I et b un majorant de I, pour tout $x \in I$, on a $a \leqslant x \leqslant b$ donc $I \subseteq [a;b]$. Ainsi
$$]a;b[\subseteq I \subseteq [a;b].$$
i) Si $(a,b) \in I^2$, alors $I = [a;b]$.
ii) Si $a \in I$ et $b \notin I$, alors $I = [a;b[$.
iii) Si $a \notin I$ et $b \in I$, alors $I =]a;b]$.
iv) Si $a \notin I$ et $b \notin I$, alors $I =]a;b[$.
- Si I est majoré mais non minoré ou si I est minoré et non majoré, en appliquant les mêmes arguments que précédemment que $I =]a;+\infty[$ ou $I = [a;+\infty[$ ou $I =]-\infty;a[$ ou $I =]-\infty;a]$.

$\square$

III Opérateurs réels

III.1 Partie entière

Proposition III.1 (Propriété d'Archimède)

Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N}, \qquad nx > y.$$

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx \leqslant y$. Donc y est un majorant de l'ensemble $A_x = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$. Notons que $x \in A_x$ et donc l'ensemble A_x est un ensemble non vide et majoré par y. D'après le Théorème II.9, on sait donc que A_x admet une borne supérieure, notons-la a. Le réel a est un majorant de A_x donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx \leqslant a$ ou encore pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\,x \leqslant a$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx \leqslant a - x$. Donc $a - x$ est un majorant de A_x strictement (car $x > 0$) plus petit que a, la borne supérieure de A ce qui est impossible. D'où le résultat.

$\square$

Corollaire III.2

Pour tout $x \in]1; +\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$x^n > y.$$

Démonstration. Si $y \leqslant 0$, le résultat est immédiat avec $n = 0$ ou $n = 1$. Supposons $y > 0$. Alors $y' = \ln(y) \in \mathbb{R}$ et $x' = \ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$. Donc par la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx' > y' \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(x) = \ln(x^n) > \ln(y)$. Par la stricte croissance de la fonction logarithme, on en déduit que $x^n > y$.

$\square$

Définition III.3

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

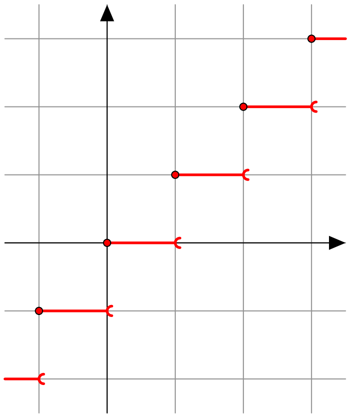
L'entier n est appelé la **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$.

Démonstration. *Unicité.* Soit n_1 et n_2 deux entiers relatifs tels que $n_1 \leqslant x < n_1 + 1$ et $n_2 \leqslant x < n_2 + 1$. En particulier $n_1 \leqslant x < n_2 + 1$ et donc $n_1 - n_2 < 1$. Puisque $n_1 - n_2$ est un entier relatif, on en déduit que $n_2 - n_1 \leqslant 0$. Par le même raisonnement en échangeant les rôles de n_1 et n_2, on montre que $n_1 - n_2 \leqslant 0 \ \Leftrightarrow \ n_2 - n_1 \geqslant 0$. Ainsi $n_1 - n_2 = 0$ et $n_1 = n_2$.
Existence. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$. Si $x \geqslant 0$, en utilisant la propriété d'Archimède, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \times 1 > x$ et par suite pour tout $n \geqslant n_0$, $n > x$. L'ensemble A_x est donc un ensemble non vide (car $0 \in A_x$) et majoré (par n_0) de $\mathbb{Z}$. L'ensemble A_x admet donc un maximum, notons-le p. Par définition de A_x, $p \leqslant x$ et puisque $p + 1$ est strictement plus grand que le maximum de A_x, on sait que $p + 1 \notin A_x$, c'est-à-dire $x < p + 1$.
Si $x \leqslant 0$, par la propriété d'Archimède, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $-x < n_0 \ \Leftrightarrow -n_0 < x$. Donc $-n_0 \in A_x$ et l'ensemble A_x est un ensemble non vide et majoré (par 0) de $\mathbb{Z}$ et donc admet un maximum. Notons-le p. De même que précédemment, $p \leqslant x < p + 1$.

$\square$

Proposition III.4

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor k \rfloor = k$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \leqslant x \ \Rightarrow k \leqslant \lfloor x \rfloor$.
4. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, constante sur tous les $[k; k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et discontinue en chaque point de $\mathbb{Z}$.



Exercice 21 : Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Exercice 22 : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

III.2 Densité dans $\mathbb{R}$

Proposition III.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre décimal $d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ vérifie

$$d_n \leqslant x < d_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre d_n est appelé **approximation décimale** par défaut de x et $d_n + \frac{1}{10^n}$ l'approximation décimale par excès de x.

Démonstration. Par définition de la partie entière, $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$. En divisant par 10^n, on obtient le résultat souhaité. □

Exemple 23 : Voici quelques approximations décimales par défaut de constante. On note c la vitesse de la lumière et h la constante de Planck.

	π	e	$c \times 10^{-8}$ $(m.s^{-1})$	$h \times 10^{34}$ $(kg.m^2 s^{-1})$
à 10^0	3	2	2	6
à 10^{-1}	$3,1$	$2,7$	$2,9$	$6,6$
à 10^{-2}	$3,14$	$2,71$	$2,99$	$6,62$
à 10^{-3}	$3,142$	$2,719$	$2,997$	$6,626$

Remarque 24 : La proposition III.5 affirme qu'il est possible d'approcher d'aussi près que l'on veut tout réel par un nombre décimal. La proposition suivante en est une reformulation d'un tel résultat.

Proposition III.6

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y$, il existe $d \in \mathbb{D}$ tel que $d \in]x; y[$.

Démonstration. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. Puisque $10 \in]1; +\infty[$, d'après le corollaire III.2, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n > \frac{1}{y-x}$ ($y \neq x$ car $y > x$). Donc $\frac{1}{10^n} < (y - x)$. Maintenant d'après la proposition III.5, on sait également qu'il existe $d_{n+1} \in \mathbb{D}$ tel que $d_{n+1} \leqslant x < d_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$. On pose $d = d_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$. Il est clair que $d \in \mathbb{D}$. D'une part, on a $x < d$. D'autre part on a $d = d_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant x + \frac{y-x}{10}$. Comme $y - x > 0$, on a $\frac{y-x}{10} < y - x$. Donc $d < x + y - x = y$. Ainsi $d \in]x; y[$. □

Corollaire III.7

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r \in]x; y[$ et $\alpha \in]x; y[$.

Démonstration. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$. D'après la proposition précédente, il existe $d \in]x; y[$. Donc $r = d \in \mathbb{Q}$ convient comme rationnel. Puisque $x' = x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} = y'$, on sait qu'il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$. Posons $\alpha = r + \sqrt{2}$. Il est clair que $\alpha \in]x; y[$. Supposons que $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors par stabilité de $\mathbb{Q}$ par addition, $\alpha - r = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce que l'on sait être faux. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$. $\square$

III.3 La valeur absolue

Définition III.8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x le réel positif, noté $|x|$ et défini par

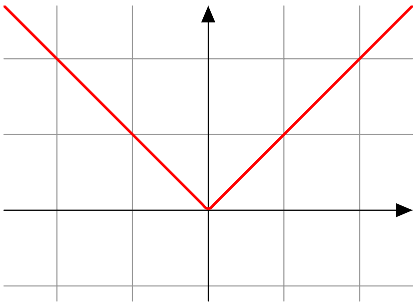
$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Proposition III.9

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.
2. $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ ou $x = -y$.
3. $|x| \geqslant x$.
4. $|xy| = |x|\,|y|$.

Démonstration. Exercice ! $\square$



Proposition III.10 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|.$$

C'est un cas particulier de l'inégalité triangulaire complexe.

Définition III.11

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **distance** entre x et y, noté $d(x, y)$ le réel positif définit par

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Proposition III.12

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $h \in \mathbb{R}_+$.

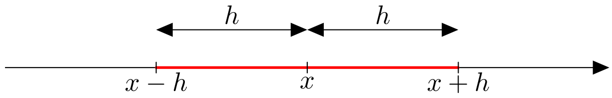
1. $d(x, y) \geqslant 0$ et $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$.
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.
4. $d(x, 0) \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad -h \leqslant x \leqslant h$.
5. $d(x, y) \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad y - h \leqslant x \leqslant y + h \quad \Leftrightarrow \quad x - h \leqslant y \leqslant x + h$.

Démonstration. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $h \in \mathbb{R}_+$.

1. $d(x, y) = |x - y| \geqslant 0$ et $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
2. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow |x - y| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$.
3. $d(x, y) = |x - y| = |x - z - (y - z)| \leqslant |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(z, y)$.
4. $d(x, 0) \quad \Leftrightarrow \quad |x - 0| = |x| \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant h$ et $-x \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad -h \leqslant x \leqslant h$.
5. $d(x, y) \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad -h \geqslant x - y \leqslant h \quad \Leftrightarrow \quad y - h \leqslant x \leqslant y + h \quad \Leftrightarrow \quad x - h \leqslant y \leqslant x + h$.

□

Représentation géométrique.



Exercice 25 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$, $I_a = [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$ et $I_b = [b - \varepsilon; b + \varepsilon]$. Décrire $I_a \cap I_b$.

Proposition III.13

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'ensemble A est borné.
2. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant M$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Par définition, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Posons $M = \max(\beta, -\alpha) \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in A$, $x \leqslant \beta \leqslant M$ et $-x \leqslant -\alpha \leqslant M$. Donc pour tout $x \in A$, on a $|x| \leqslant M$. Notez que M est bien positif car supérieur à des valeurs absolues.
(2) $\Rightarrow$ (1). Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leqslant A$. On a pour tout $x \in A$, $-M \leqslant x \leqslant M$. Donc la partie A est majorée par M et minorée par $-M$.

□

IV Exemples de résolutions dans $\mathbb{R}$

IV.1 Avec valeur absolue

Exemple 26 : Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\left|x^2 - 2x + 3\right| = \left|-x^2 + 3x + 2\right|$.

Exemple 27 : Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\left|x^2 + x - 3\right| \leqslant 4$.

Exemple 28 : Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|3x - 2| + |x + 1| + \left|x^2 + x + 1\right| = 1$.

IV.2 Avec racine carré

Exemple 29 : Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{x}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x+1}} \geqslant 0$.

Exemple 30 : Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2 + x - 4} = \sqrt{x - 1}$.

Exemple 31 : Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \leqslant x - \frac{3}{2}$.

IV.3 Avec système d'équations

Exemple 32 : Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$.

Exemple 33 : Déterminer l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$.

Exemple 34 : Déterminer l'ensemble des éléments $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y - z + 3t = 2 \\ y + z + t = 1 \end{cases}$.

Exemple 35 : Déterminer l'ensemble des éléments $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} xy = -3 \\ x + y = -2 \end{cases}$.

Exemple 36 : Déterminer l'ensemble des éléments $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xyz = 0 \\ x^2 + y + z = 1 \end{cases}$.

ARCHIMEDE *(Syracuse, environ 287 av. J.C. - Syracuse 212 av. J.C.) est, avec Euclide, le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Fils de l'astronome Pheidias, il grandit à Syracuse puis fit un séjour à Alexandrie où il étudie auprès des successeurs d'Euclide. Il y rencontra probablement Eratosthène qu'il tiendra plus tard au courant de ses découvertes. Le gouvernement de Syracuse demandait régulièrement conseil à Archimède tant sa maitrise à résoudre les problèmes théoriques et technique était réputée. Les inventions techniques d'Archimède, étayées par les lois physique qu'il découvrit, ont fasciné ses contemporains et ont fait de lui un personnage légendaire. Sa contribution aux mathématiques concerne l'arithmétique et la géométrie. Archimède attribut à Eudoxe la propriété d'Archimède.*
Lors de l'attaque de Syracuse (colonie grecque) par les romains, le général Marcellus ordonna à ses soldats de laisser la vie sauve au savant. La légende raconte que l'un d'entre eux entra chez Archimède pendant que celui-ci peu concerné par la bataille qui faisait rage étudiait une figure géométrique dessinée sur le sol sableux. Dérangé par l'irruption du soldat, Archimède lui demanda de se tenir à l'écart pour ne pas endommagé le graphique. Le soldat se sentant insulté tua Archimède.
L'histoire est probablement romancé, le soldat fut sans doute motivé par la richesse des instruments du savant. Les romains lui firent cependant une tombe en respectant sa volonté d'y inscrire une sphère incluse dans un cylindre.

« Il y a des choses qui paraissent incroyables à la plupart des personnes qui n'ont pas étudié les mathématiques. »

Archimède.

« On se souviendra d'Archimède quand on aura oublié Eschyle, parce que les langues meurent, mais pas les idées mathématiques. Immortalité est sans doute un mot creux, mais un mathématicien a probablement plus de chances d'en jouir qu'un autre. »

Godfrey H. Hardy

Posons $x = 0,999999\ldots$. En multipliant par 10, on obtient que $10x = 9,999999\ldots$ et donc $9x = 10x - x = 9,999999\cdots - 0,999999\cdots = 9$. Finalement $x = 1$. Ce résultat est-il choquant ?