Colle du 12/03 - Sujet 1
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours. Montrer que si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ alors α est une racine de multiplicité m de P.

Exercice 1. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 2. Soient $a < b$ deux réels et $E = \mathscr{C}([a;b];\mathbb{R})$. On définit

$$F = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \right\} G \qquad = \{ g \in E \mid \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in [a;b],\ g(t) = C \}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E et préciser la décomposition d'un élément $h \in E$.

Colle du 12/03 - Sujet 2
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soient P et Q deux polynômes tels que $P^2 = (X-1)\,Q^2$. Montrer que $P = Q = 0$.

Exercice 2. Soient A et B deux parties d'un espaces vectoriels E.

1. Rappeler la définition de $\operatorname{Vect}(A)$.
2. Montrer que $\operatorname{Vect}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Vect}(A) \cap \operatorname{Vect}(B)$.
3. Démontrer que l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie à l'aide d'un contre-exemple dans $\mathbb{R}^3$.

Colle du 12/03 - Sujet 3
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours. Démontrer l'unicité de la division euclidienne.

Exercice 1. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $(X+1)^{2017} - X^{2017} - 1$.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F possède un supplémentaire G de dimension finie et que G admet $(e_1, \ldots, e_k)$ pour base. On pose également $a \in F$ et on définit $G_a = \operatorname{Vect}\{a + e_1, \ldots, a + e_k\}$.

1. Montrer que G_a est un supplémentaire de F dans E.
2. En déduire que si F est non trivial (différent de E et de $\{0_E\}$), alors F admet une infinité de supplémentaires dans E.