Colle du 09/04 - Sujet 1
Applications linéaires - Dénombrement

Question de cours. Démontrer la formule donnant le cardinal de l'ensemble $E \times F$.

Exercice 1. Un diner autour d'une table ronde est organisé. On invite n couples homme/femme.

1. Combien y a-t-il de plans de table ?
2. On impose de ne pas séparer les couples. Combien de plans de tables sont possibles ?
3. On impose d'alterner les genres. Compter à nouveau le nombre de possibilités.
4. Finalement on décide de ne pas séparer les couples et d'alterner les genres. Dénombrer.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\text{rg}(u+v) \leqslant \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ puis que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leqslant \text{rg}(u-v)$.

Colle du 09/04 - Sujet 2
Applications linéaires - Dénombrement

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(u)$ tel que $u^3 + 2u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}\,(u) \oplus \text{Im}\,(u)$.
2. On pose $\tilde{u} = u_{|_{\text{Im}(u)}}$. Que peut-on dire de $\tilde{u}$?

Exercice 2. Soient E un ensemble fini à n éléments, $p \in [\![0; n]\!]$ et

$$F = \left\{ (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \;\middle|\; A \cap B = \emptyset, \quad \text{et} \quad \text{Card}\,(A \sqcup B) = p \right\}.$$

En dénombrant F de deux manières, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Colle du 09/04 - Sujet 3
Applications linéaires - Dénombrement

Question de cours. Montrer que $\text{rg}\,(g \circ f) \leqslant \min\left(\text{rg}(g), \text{rg}(f)\right)$.

Exercice 1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P'' \end{array}$. Montrer que φ est un isomorphisme.

Exercice 2. Dénombrer l'ensemble

$$\mathscr{A} = \{ f \in \mathscr{F}\left([\![1; n]\!], [\![1; n]\!]\right) \mid \forall k \in [\![1; n-1]\!], \quad f(k) \leqslant f(k+1) \leqslant f(k) + 1 \}.$$