Colle du 16/04 - Sujet 1
Séries et probabilités

Question de cours. Montrer que si deux probabilités coïncident sur les singletons alors les probabilités sont égales.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 2. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. On suppose ici que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Démontrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.

Exercice 3. Un message doit être transmis d'un point à l'autre à travers des canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs 0 ou 1 et à chaque passage de canal a une probabilité p d'être bruité c'est-à-dire d'être transformé en son contraire durant le passage du canal. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'évènement : « Après la passage par le n-ième canal, le message est le même que celui initialement émis. » et $p_n = \mathbb{P}(I_n)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Colle du 16/04 - Sujet 2
Séries et probabilités

Question de cours. Deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents ont même nature.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$.

Exercice 2. On dispose de $N+1$ urnes distinctes, numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit l'une des urnes de façon équiprobable et sans connaitre son numéro, on tire à n reprises une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Sachant que les n premiers tirages ont retourné une boule blanche, quelle est la probabilité que le $n+1$-ième tirage donne une boule blanche ?
2. Quelle est cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

Exercice 3. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. En utilisant une série télescopique, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{-n}\ln(x_n)$ converge.

Colle du 16/04 - Sujet 3
Séries et probabilités

Question de cours. Montrer que si B n'est pas négligeable alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Exercice 2. Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $k \in]0;1[$ et $f : I \to I$ une fonction k-lipschitzienne, c'est-à-dire telle que pour tout $(x,y) \in I^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|$. On fixe $u_0 \in I$ et on définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une majoration de $|u_{n+1}-u_n|$ et en déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1}-u_n)$ converge.
2. Démontrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 3. Une personne remplit une urne initialement vide avec trois boules de la façon suivante. Elle lance à trois reprise une pièce équilibrée. Lorsque le résultat est pile elle ajoute une boule blanche et si le résultat est face elle ajoute une boule noire. Une seconde personne ne connaissant pas la composition de l'urne effectue à l'aveugle et de façon équiprobable n tirages, $n \in \mathbb{N}^*$, successifs avec remise dans l'urne. On note pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, B_i l'évènement « la couleur de la i-ième boule est blanche ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. On note B^n l'évènement « les n boules tirées sont blanches ». Calculer $\mathbb{P}(B^n)$.