Colle du 07/05 - Sujet 1
Séries et probabilités

Question de cours. Montrer que si B n'est pas négligeable alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n)}{n}$ et donner un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 2. On considère une urne contenant autant de boules rouges que de boules vertes. Pour $n \geqslant 2$, on effectue n tirages successifs indépendants avec remise dans cette urne. On note

- A : « on a obtenu au cours des n tirages au plus une boule rouge »
- B : « on a obtenu au cours des n tirages des boules de chacune des couleurs ».

Etudier l'indépendance de A et B.

Colle du 07/05 - Sujet 2
Séries et probabilités

Question de cours. Montrer que si deux probabilités coïncident sur les singletons alors les probabilités sont égales.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge.

Exercice 2. Une personne remplit une urne initialement vide avec trois boules de la façon suivante. Elle lance à trois reprise une pièce équilibrée. Lorsque le résultat est pile elle ajoute une boule blanche et si le résultat est face elle ajoute une boule noire. Une seconde personne ne connaissant pas la composition de l'urne effectue à l'aveugle et de façon équiprobable n tirages, $n \in \mathbb{N}^*$, successifs avec remise dans l'urne. On note pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, B_i l'évènement « la couleur de la i-ième boule est blanche ».

1. Calculer $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. On note B^n l'évènement « les n boules tirées sont blanches ». Calculer $\mathbb{P}(B^n)$.

Colle du 07/05 - Sujet 3
Séries et probabilités

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de comparaison.

Exercice 1. Un laboratoire fabrique des alcootests. On dispose des données suivantes :

- Lors d'un contrôle de gendarmerie, 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété.
- Lorsque la personne est en état d'ébriété, le résultat du contrôle est positif 95 fois sur 100.
- Lorsque la personne n'est pas en état d'ébriété, le résultat du contrôle est bien négatif dans 98 fois sur 100.

1. Lorsque le résultat est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. Lorsque le résultat est négatif, quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
3. Déterminer la probabilité que le résultat du contrôle soit erroné.

Exercice 2. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. En utilisant la formule $\sin(2a) = \ldots$ calculer la somme totale de la série.