Colle du 13/05 - Sujet 1
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Convergence d'une somme de Riemann : énoncé dans le cas continue et démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$.

Exercice 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (2P(2) - P(1),\ P'(1) + P'(-1),\ P(1) + P'(2) + P''(3)) \end{cases}$.

1. Déterminer A la matrice canoniquement associée à f.
2. Calculer $f\left(X^2 - X - 1\right)$.
3. Quel est le rang de f ?

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \lambda^n\, n!$. Démontrer que f est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda}\right[$.

Colle du 13/05 - Sujet 2
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Formule de Taylor avec reste intégral : énoncé et démonstration.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer u.
2. Calculer $\text{Ker}\,(A)$. Que vaut $\text{Ker}\,(u)$?
3. Calculer $\text{rg}\,(A)$.

Exercice 2.

1. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Justifier que F est bien définie sur $]0; +\infty[$. Quelle est sa régularité sur $]0; +\infty[$?
2. Donner le développement limité de la fonction cosinus en 0.
3. A l'aide d'un encadrement inspiré de la question précédente, déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

Colle du 13/05 - Sujet 3
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Enoncer et démonstration de la matrice d'une composition.

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Lorsque f est $\mathscr{C}^1$, déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On considère f l'endomorphisme de E tel que sa matrice dans (e_1, e_2, e_3) soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}\,(f)$ et une base de $\text{Im}\,(f)$.
2. Les espaces $\text{Ker}\,(f)$ et $\text{Im}\,(f)$ sont-ils supplémentaires ?
3. On pose $u = e_1 + e_2 - e_3$. Montrer que $(u, f(e_1), f(e_2))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.