Colle du 14/05 - Sujet 1
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Convergence d'une somme de Riemann : énoncé dans le cas continue et démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$.

Exercice 1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que $3e_1 + e_2 - e_3 \in \text{Ker}\,(f)$, $f\,(e_1) = 2e_1 + e_3$ et $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, où $A = \text{mat}_{\mathscr{B}}\,(f)$. Déterminer A.

Exercice 2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^x t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Calculer $f_0(x)$ puis $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)$.
2. Etablir une relation de récurrence entre f_n et f_{n+1}.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En déduire une expression de $f_n(x)$ sous forme d'une somme.
4. Retrouver ce résultat à l'aide d'un théorème du cours.
5. Montrer que f_n admet une limite en $+\infty$, notée l_n et que $l_n = n!$.

Colle du 14/05 - Sujet 2
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Enoncer de l'isomorphisme entre $\mathscr{L}\,(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}\,(\mathbb{K})$ et démonstration de la linéarité.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T > 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante si et seulement si f est T périodique.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base de Ker (f).
2. Déterminer une base de Ker $(f - \text{Id})$ et une base de Ker $(f - 2\text{Id})$.
3. Déterminer la matrice de f dans une base adaptée.
4. Déterminer Im (f).

Colle du 14/05 - Sujet 3
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Enoncer et démonstration de la matrice d'une composition.

Exercice 1. Soit $a > 0$ et $f : [-a; a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que pour tout $x \in [-a; a]$, on a

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2a} |f(a) + f(-a)| + \frac{a^2 + x^2}{2a} \sup_{t \in [-a;a]} |f''(t)| .$$

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B} = \left((X-1)^2, (X+1)^2, X^2 - 1\right)$ et $\mathscr{C} = ((1,2,3), (1,2,0), (1,0,0))$.
On pose enfin $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$.
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. On pose $\mathscr{B}' = \left(X^2 - 1, 4, 2X^2 + 2X + 4\right)$. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(u)$.

Colle du 14/05 - Sujet 4
Intégration et représentation matricielle

Question de cours. Formule de Taylor avec reste intégral : énoncé et démonstration.

Exercice 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto (X+1)\, P'(X-1) - P(X+2) \end{cases}$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique puis dans la base $\mathscr{B} = \left(X - 1, -X^2 + 4X + 1, 1\right)$. On justifiera que $\mathscr{B}$ est bien une base.

Exercice 2. Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Dresser le tableau de variations de F (on ne demande pas les limites aux bornes).
2. Montrer que F est prolongeable par continuité en 0. On posera $a = F(0)$ cette nouvelle valeur de F en 0.
3. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = a$.