Colle du 09/10 - Sujet 1
Nombres complexes

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$.
2. Déterminer l'ensemble des complexes $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} iz_1 - 2z_2 = -4 + 3i \\ 2\overline{z_2} + \overline{z_1} = 3. \end{cases}$$

Exercice 2.

1. Soient z_1 et z_2 deux complexes. En exprimant z_1 et z_2 en fonction de $z_1 + z_2$ et de $z_1 - z_2$, montrer que

$$|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|\,.$$

2. Interpréter géométriquement cette inégalité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait égalité.

Colle du 02/10 - Sujet 2
Nombres complexes

Question de cours. Donner l'application complexe d'une rotation de centre O et d'angle θ et démontrer cette formulation.

Exercice 1. Soit $\omega \in \mathbb{U}_7$. Calculer :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}.$$

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0$.
2. Démontrer que parmi les solutions de l'équation précédente, trois points décrivent une triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $8\,\mathrm{e}^{4z} + 8\,\mathrm{e}^{3z} - \mathrm{e}^{z} - 1 = 0$.
4. Déterminer l'ensemble des réels $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$8\sin^3(\theta) - 2\sin(\theta)\sin(3\theta) - \sin(\theta) - 3\cos(2\theta) + 2 = 0.$$

Colle du 02/10 - Sujet 3
Nombres complexes

Question de cours. Donner la forme polaire des racines n-ièmes de l'unité et en donner la démonstration.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z+i)^n = (z-i)^n$.

Exercice 2. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

1. Calculer ω l'affixe de Ω le centre de gravité du triangle ABC.
2. On suppose que le triangle ABC est équilatéral.
   (a) Exprimer b en fonction de a et de ω puis c en fonction de a et de ω.
   (b) En déduire que $a + bj + cj^2 = 0$.
3. On suppose maintenant que $a + bj + cj^2 = 0$.
   (a) Soient a', b' et c' respectivement les images de a, b et c par la translation de vecteur d'affixe $-\omega$. Montrer que $a' + b'j + c'j^2 = 0$.
   (b) Préciser le centre de gravité de $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$.
   (c) En déduire que $A'B'C'$ est équilatéral et conclure.