Colle du 04/12 - Sujet 1
Intégrales et équations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la dérivation de la fonction arcsin.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+x+1}$.

Exercice 2. Soient $T > 0$ et a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x). \tag{E}$$

1. Montrer que si y est une solution de (E) alors $x \mapsto y(x+T)$ est aussi une solution de (E). Que dire alors de la fonction $x \mapsto y(x+T) - y(x)$?
2. Soient A la primitive de a s'annulant en a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x+T) = A(x) + A(T).$$

3. Discuter suivant la valeur de $A(T)$ du nombre de solutions périodiques de l'équation homogène associée à (E).

Colle du 04/12 - Sujet 2
Intégrales et équations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de changement de variable.

Exercice 1.

1. Calculer $F_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $F_2 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\forall t > 0, \quad ty'(t) - \left(2t^2+1\right)y(t) - 2ty^2(t) = 0. \tag{E}$$

Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
On pourra poser $y = -1/z$.

Colle du 04/12 - Sujet 3
Intégrales et équations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la formulation de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Exercice 1. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)}$.

1. Effectuer le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$ et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$