Colle du 11/12 - Sujet 1
Equations différentielles et matrices

Question de cours. A l'aide des solutions complexes, déterminer l'ensemble des solutions réelles lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est strictement négatif.

Exercice 1. On considère une particule chargé dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz). On note ω la pulsation associée ($\omega = \frac{qB}{m}$, où q est la charge de la particule, B l'intensité du champ magnétique et m la masse de la particule), $M(t) = (X(t); Y(t); Z(t))$ la position de la particule à l'instant $t \in \mathbb{R}$ et on suppose les fonctions X, Y, Z deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on pose $M'(t) = (x(t); x(t); z(t)) = (X'(t); Y'(t); Z'(t))$ la vitesse de la particule à l'instant t. On admet que les fonctions x, y et z vérifie les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} x'(t) = \omega x(t) \\ y'(t) = -\omega y(t) \\ z'(t) = 0. \end{cases}$$

Résoudre le système ci-dessus et déduire la vitesse de la particule puis sa position au cours du temps sachant que $M'(0) = (0; 1; 1)$ et $M(0) = (1; 0; 0)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble suivant (appelé le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) :

$$\mathscr{Z} = \{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA \}.$$

Colle du 11/12 - Sujet 2
Equations différentielles et matrices

Question de cours. Démontrer que $t \mapsto e^{rt}$ est une solution de (E_0) si et seulement si r est une solution de l'équation caractéristique.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que
$$\operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0_n.$$
2. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. Démontrer que
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM) \quad \Rightarrow \quad A = B.$$

Exercice 2. Résoudre sur $I =]-1; 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \left(1 - x^2\right)^2 y''(x) - xy'(x) - 2 = 0.$$

On pourra poser $t = \varphi(x) = \arcsin(x)$ *et* $z = y \circ \varphi^{-1}$.

Colle du 11/12 - Sujet 3
Equations différentielles et matrices

Question de cours. Démonstration de la formule de la trace du produit.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \left(1+x^2\right)^2 y''(x) + 2x\left(1+x^2\right) y'(x) + 4y(x) = 0.$$

On pourra poser $t = \varphi(x) = \arctan(x)$ *et* $z = y \circ \varphi^{-1}$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que

$$^tAA = A^tA \qquad \Leftrightarrow \qquad A \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}).$$

Colle du 11/12 - Sujet 4
Equations différentielles et matrices

Question de cours. Démonstration de la formule de la transposée du produit.

Exercice 1. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$, définie par $a_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $a_{i,j} = 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
On pourra calculer $(A + I_n)^2$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E) \qquad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

1. Montrer que la fonction $y_0 :]0;\pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est une solution de (E) sur $]0;\pi[$.
2. Soit $z \in \mathscr{F}(]0;\pi[, \mathbb{R})$. On pose pour tout $x \in]0;\pi[$, $y(x) = z(x)y_0(x)$. Démontrer que y est une solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 (F) que l'on déterminera.
3. En déduire les solutions de (E) sur $]0;\pi[$.