



Colle du 15/01 - Sujet 1
Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Question de cours. Énoncer le théorème reliant le rang d'une matrice associée à un système avec le nombre de solutions de ce système.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $X \mapsto AX$.

1. Déterminer

$$\text{Ker}(A) = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0 \}.$$

2. La fonction φ est-elle injective ?

Exercice 2. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. On pose

$$A = \{ x \in E \mid x \notin f(x) \}.$$

Montrer que A n'admet pas d'antécédent. Que peut-on en déduire pour f ?



Colle du 15/01 - Sujet 2
Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Question de cours. Soit \mathcal{R} est relation d'équivalence. Démontrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow Cl(x) = Cl(y) \Leftrightarrow Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $X \mapsto AX$.

1. Déterminer

$$\text{Im}(A) = \{ Y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists X \in \mathbb{R}^3, AX = Y \}.$$

2. La fonction φ est-elle surjective ?

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Montrer que

$$(f \text{ injective}) \Leftrightarrow (\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').)$$



Colle du 15/01 - Sujet 3
 Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Question de cours. Démontrer une relation entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

Exercice 1. Discuter suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$ des solutions du système suivant :

$$S : \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a - 1)z = a \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Montrer que

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(X)^2, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$