Colle du 28/01 - Sujet 1
Analyse asymptotique et continuité

Question de cours. Démonstration du théorème d'encadrement dans le cas où la variable tend vers $-\infty$.

Exercice 1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{\substack{y\to 1\\ y\neq 1}} \frac{y^y - y}{1 - y + \ln(y)}.$$

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. On suppose g décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On veut montrer que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$

1. Soit $x > 0$. Soit $h \in \mathbb{R}$. Déterminer un encadrement de $f(x+h)$ lorsque $h \geqslant 0$ puis lorsque $h \leqslant 0$.
2. Conclure.

Colle du 28/01 - Sujet 2
Analyse asymptotique et continuité

Question de cours. Comparer asymptotiquement $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$. Le démontrer.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 1$. Montrer que f est constante. Ce résultat est-il toujours vrai si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Exercice 2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x \arctan(x)\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Colle du 28/01 - Sujet 3
Analyse asymptotique et continuité

Question de cours. Démonstration à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 1. Soit

$$\begin{aligned} f :]1;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \end{aligned}$$

Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer sa position par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f\left(x^2\right) = f(x).$$

1. Montrer que f est constante sur $[1;+\infty[$.
2. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}_+$
3. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.