Devoir Maison 1

A rendre pour le jeudi 27/09

La qualité de la rédaction entrera pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Une marge doit être laissée au correcteur. Les questions doivent être référencées par leur numéro complet. Les résultats doivent être soulignés ou encadrés. La réflexion en groupe est autorisée mais la rédaction doit être ***personnelle****. La moindre suspicion de recopiage entrainera l'annulation de la copie du copieur et du copié. Les deux exercices sont indépendants.*

Exercice I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les assertions

$$P_n : (3 \text{ divise } 4^n + 1)$$

et

$$Q_n : (3 \text{ divise } 4^n - 1)\,.$$

I.1 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_n \Rightarrow P_{n+1})$.

I.2 Démontrer que l'assertion $(\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n$ est vraie) est vraie.

I.3 Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $(Q_n \Rightarrow \mathit{non}\,(P_n))$ est vraie.

I.4 En déduire que l'assertion $(\exists n \in \mathbb{N},\ P_n$ est vraie) est fausse.

Exercice II

Définition II.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est deux fois dérivable si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée f' est elle-même une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note alors f'' la dérivée de f', appelée la dérivée seconde de f.

II.1 Justifier que la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}} \end{aligned}$$

est dérivable deux fois et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi''(x) = \left[\sqrt{3x^2+1}\,(1-6x^2) + 3x^2\right] \frac{3}{(3x^2+1)^3}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}}\,.$$

On considère $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que

$$f'' = -f.$$

II.2 Soient a, b, c trois réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pour quelles valeurs de a, b et c, la fonction f est-elle un élément de $\mathscr{S}_0$?

II.3 Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathscr{S}_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathscr{S}_0$.

On considère maintenant $\mathscr{S}$ un sous-ensemble de $\mathscr{S}_0$ défini par

$$\mathscr{S} = \{\, f \in \mathscr{S}_0 \mid f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0 \,\}\,.$$

II.4 En cherchant du côté des fonctions trigonométriques, donner un exemple de fonction dans $\mathscr{S}$.

II.5 Démontrer que $\mathscr{S}$ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $(f_1, f_2) \in \mathscr{S}^2$, et tout $t \in [0;1]$, on a $tf_1 + (1-t)f_2 \in \mathscr{S}$.

On fixe dans la suite une fonction $f \in \mathscr{S}$.

II.6 On pose $g = f'$. Montrer que $g \in \mathscr{S}_0$.

II.7 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x)^2 + g(x)^2 = 1.$$

II.8 En déduire que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition II.2

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit h est paire si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(-x) = h(x).$$
- On dit h est impaire si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(-x) = -h(x).$$

II.9 Démontrer que si h est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ alors h' est impaire.

II.10 Montrer que la fonction $u : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(-x) \end{cases}$ est encore un élément de $\mathscr{S}$.

II.11 A l'aide des fonctions f et u, construire une fonction v qui soit paire et dans $\mathscr{S}$.

On admet désormais le théorème suivant.

Théorème II.3

L'ensemble $\mathscr{S}$ contient un et un seul élément. Il existe une unique fonction f telle que
$$\mathscr{S} = \{f\}.$$

On suppose que les fonctions cosinus et sinus n'ont pas été construites. Tout résultat sur ces fonctions ne pourra être exploité dans les questions qui suivent. On continue de noter f cette unique élément et g sa dérivée.

II.12 Montrer que f est paire et en déduire la parité de g.

II.13 Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(a)f(x-a) - g(a)g(x-a)$.

II.14 En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a+b) = f(a)f(b) - g(a)g(b)$ et $g(a+b) = f(a)g(b) + g(a)f(b)$.

II.15 On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

(a) Démontrer que pour tout $x > 1$,
$$g(x) < g(1) < 0.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = f(x) - xg(1)$. Montrer que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

(c) Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant \alpha$, $f(x) \leqslant 0$.

II.16 En déduire que f admet au moins une valeur d'annulation sur $\mathbb{R}$.

Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(T) = 0$.

II.17 Montrer que $f(2T) = -1$ et que $g(2T) = 0$.

II.18 En déduire $f(4T)$ et $g(4T)$.

II.19 Montrer que f est $4T$-périodique c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x + 4T) = f(x).$$