Corrigé du Devoir Maison 10

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension infinie et si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Im}\left(f^k\right) = E$.

Partie A : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{pmatrix} \end{array}.$$

A.1 Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 5(\lambda z + \mu z') \\ -2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') \\ -4(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 5(\lambda z + \mu z') \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4x' - y' + 5z' \\ -2x' - y' - z' \\ -4x' + y' - 5z' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

A.2 (a) On note $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors,

$$\operatorname{Im}(f) = f\left(\mathbb{R}^3\right) = f\left(\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)\right) = \operatorname{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

On ne change pas un espace engendré en effectuant des opérations élémentaires sur les vecteurs de la famille génératrice. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right) && L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \end{array} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{-1}{6} L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Les vecteurs $e_1 + e_2 - e_3$ et e_2 n'étant pas colinéaires forme une famille libre de $\operatorname{Im}(f)$ qui engendre $\operatorname{Im}(f)$. Donc

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{B}_{\operatorname{Im}(f)} = (e_1 + e_2 - e_3, e_2) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f) \text{ qui est donc de dimension } \dim(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Card}\left(\mathscr{B}_{\operatorname{Im}(f)}\right) = 2.}$$

(b) On pose $u=(-1,1,1)$. On a
$$f(u)=\begin{pmatrix}-4-1+5\\2-1-1\\4+1-5\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}.$$
Par conséquent, on a bien $u\in \mathrm{Ker}\,(f)$.

(c) *« Le théorème du rang, c'est puissant » $T1^2$, verset 1, livre 1.* On a vu à la question 1 que $\mathrm{rg}\,(f)=\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2$. Donc par le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Ker}\,(f))=\underset{\substack{\uparrow\\ \textit{espace de départ}}}{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)}-\mathrm{rg}\,(f)=3-2=1.$$
Or d'après la question précédente, $u\in\mathrm{Ker}\,(f)$ avec $u\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ il constitue donc une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Conclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f)=\mathrm{Vect}\,(-1,1,1)\text{ et est de dimension }1}$.

(d) D'après les questions précédentes, $\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et (u) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$. Donc
$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,(f)+\mathrm{Im}\,(f)&=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)}\cup u\right)\\
&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) && L_3\leftarrow L_3+L_1\\
&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) && L_3\leftarrow L_3-2L_2\\
&=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Im}\,(f)\end{aligned}$$
On constate donc que $\mathrm{Ker}\,(f)+\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Im}\,(f)\neq\mathbb{R}^3$, car en particulier, $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2\neq\dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc $\boxed{\text{les espaces Ker }(f)\text{ et Im}\,(f)\text{ ne sont pas supplémentaires dans }\mathbb{R}^3.}$

A.3 (a) On a pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned}f^2(x,y,z)&=f\begin{pmatrix}4x-y+5z\\-2x-y-z\\-4x+y-5z\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}4(4x-y+5z)-(-2x-y-z)+5(-4x+y-5z)\\-2(4x-y+5z)-(-2x-y-z)-(-4x+y-5z)\\-4(4x-y+5z)+(-2x-y-z)-5(-4x+y-5z)\end{pmatrix}\end{aligned}$$
$$\boxed{f^2(x,y,z)=\begin{pmatrix}-2x+2y-4z\\-2x+2y-4z\\2x-2y+4z\end{pmatrix}}$$

(b) A l'aide de la question précédente, on remarque que
$$\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\left\{(-2x+2y-4z)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\;\middle|\;(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$\boxed{\text{Le vecteur }(1,1,-1)\text{ est un vecteur non nul et constitue donc une base de Ker }(f)\text{ qui est alors de dimension 1.}}$

(c) On sait à l'aide de la question précédente et du théorème du rang que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,\left(f^2\right)\right)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-$

$\dim\left(\operatorname{Im}\left(f^2\right)\right) = 3-1=2$. Déterminons-en une base. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \operatorname{Ker}\left(f^2\right) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2x+2y-4z\\-2x+2y-4z\\2x-2y+4z\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}\\ &\Leftrightarrow -2x+2y-4z=0\\ &\Leftrightarrow x=y-2z.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}\left(f^2\right)=\left\{\begin{pmatrix}y-2z\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\,(y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

$\boxed{\text{Les deux vecteurs étant non colinéaires, on en déduit qu'ils forment une famille libre et donc une base de } \operatorname{Ker}\left(f^2\right) \text{ qui est bien de dimension 2.}}$

(d) Plusieurs méthodes. On peut démontrer que les deux espaces sont supplémentaires par concaténation des bases. Montrons ici que leur intersection est réduite au vecteur nul. Soit $v\in\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\cap\operatorname{Im}\left(f^2\right)$. Puisque $v\in\operatorname{Im}\left(f^2\right)$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $v=\lambda(1,1,-1)$, d'après la question A.3.(b). De même d'après la question A.3.(c), on en déduit qu'il existe $(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $v=\mu(1,1,0)+\nu(-2,0,1)=(\mu-2\nu,\mu,\nu)$. On en déduit donc que

$$\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-2\nu\\\mu\\\nu\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda=\mu-2\nu\\\lambda=\mu\\\lambda=-\nu\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-2\lambda=0\\\mu=\lambda\\\nu=-\lambda\end{cases}\quad L_1\leftarrow L_1-L_2-2L_3.$$

On en déduit que $\lambda=\mu=\nu=0$ et donc $v=0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi $\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\cap\operatorname{Im}\left(f^2\right)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or à l'aide du théorème du rang (ou des dimensions précédemment établies), on a

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Im}\left(f^2\right)\right)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires à l'aide de la dimension, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\oplus\operatorname{Im}\left(f^2\right)=\mathbb{R}^3.}$$

Partie B : Généralités en dimension quelconque

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de f.

B.1 Soit $f\in GL(E)$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Alors, on sait d'après le cours que $f^k\in\mathrm{GL}(E)$. Notamment f^k est injective et donc $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)=\{0_E\}$. De plus f^k est surjective donc $\operatorname{Im}\left(f^k\right)=E$. Conclusion,

$$\boxed{E=E\oplus\{0_E\}=\operatorname{Ker}\left(f^k\right)\oplus\operatorname{Im}\left(f^k\right).}$$

montrer alors que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)\oplus\operatorname{Im}\left(f^k\right)=E$.

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

B.2 Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrons que $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(f^k\right)$. Soit $y\in\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)$. Par définition, il existe $x\in E$ tel que $y=f^{k+1}(x)=f^k(f(x))$. Par conséquence, y est l'image de $f(x)$ par f^k et donc $y\in\operatorname{Im}\left(f^k\right)$. Conclusion, $\boxed{\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(f^k\right)}$.

B.3 Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrons que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)\subseteq\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Soit $x\in\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. Alors $f^k(x)=0_E$ en donc en composant par f, $f^{k+1}(x)=f(0_E)=0_E$ car f est linéaire. Donc $x\in\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Conclusion $\boxed{\operatorname{Ker}\left(f^k\right)\subseteq\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)}$.

B.4 Soit $p\in\mathbb{N}$. On suppose que $\operatorname{Ker}(f^p)=\operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.

(a) Soit $x\in E$ tel que $f(x)\in\operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$. Par hypothèse $\operatorname{Ker}(f^p)=\operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$ donc $f(x)\in\operatorname{Ker}(f^p)$ i.e. $f^p(f(x))=0_E$ et donc $f^{p+1}(x)=0_E$. Dès lors, $x\in\operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)=\operatorname{Ker}(f^p)$. Ainsi, on a bien $\boxed{x\in\operatorname{Ker}(f^p)}$.

(b) D'après la question B.3, pour $k = p + 2$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^p\right) = \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right)$ alors $f^{p+2}(x) = 0_E$ i.e. $f^p\left(f(x)\right) = 0_E$ et donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Donc d'après la question précédente, $x \in \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. On a donc l'inclusion réciproque $\mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Conclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}\left(f^p\right) = \mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right)}$.

(c) On pose pour tout $k \geqslant p + 1$, la propriété $\mathscr{P}(k)$: « $\forall i \in [\![p + 1; k]\!]$, $\mathrm{Ker}\left(f^i\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ ». Montrons que pour tout $k \geqslant p + 1$ la propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Initialisation. Si $k = p + 1$, alors pour tout $i \in [\![p + 1; k]\!] = \{p + 1\}$ on a bien par hypothèse $\mathrm{Ker}\left(f^i\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ et donc $\mathscr{P}(p + 1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \geqslant p + 1$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k + 1)$ est vraie. On sait que pour tout $i \in [\![p + 1; k]\!]$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^i\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Prenons $i = k - 1$. Si $k - 1 \geqslant p + 1$, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Si $k - 1 = p$ l'égalité reste aussi vraie. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait aussi que $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Donc $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right) = \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$. En utilisant la question B4.(b), on en déduit que $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right) = \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$. Et donc $\mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Rappelons que par hypothèse de récurrence nous savions que pour tout $i \in [\![p+1; k]\!]$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^i\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ et donc au bilan, on a pour tout $i \in [\![p + 1; k + 1]\!]$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^i\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ i.e. $\mathscr{P}(k + 1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geqslant p + 1$ et donc pour tout $k \geqslant p + 1$, $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$, ce qui reste vraie si $k = p$. Conclusion, pour tout $k \geqslant p$,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right).}$$

Partie C : Résolution en dimension finie

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right).$$

C.1 (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a montré dans la question B.2 que $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subseteq \mathrm{Im}\left(f^k\right)$. On en déduit que

$$u_{k+1} = \mathrm{rg}\left(f^{k+1}\right) = \dim\left(\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Im}\left(f^k\right)\right) = u_k.$$

On a donc montré que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. De plus par définition du rang, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_k \geqslant 0$. Conclusion, $\boxed{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante et minorée par } 0}$.

(b) La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Nécessairement $\boxed{\text{cette suite stationne à partir d'un certain rang}}$.

Pour les sceptiques (rigoureux ? puristes ?) : procédons par l'absurde. Supposons que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas. Cela revient à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant n$ tel que $u_m \neq u_n$ et donc par décroissance de la suite $u_m < u_n$. On peut ainsi construire une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit strictement décroissante. Pour $n = 1$, il existe $\varphi(1) \geqslant 2$ tel que $u_{\varphi(1)} < u_1$. Puis il existe $\varphi(2) \geqslant \varphi(1) + 1$ tel que $u_{\varphi(2)} < u_{\varphi(1)}$ et ainsi de proche en proche (ou par récurrence) on construit une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante. La suite étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} < u_1 - n$ (chaque décroissance entraine un saut d'au moins 1) et donc à partir d'un certain rang, $u_{\varphi(n)} < 0$ ce qui contredit le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a fortiori est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p **l'indice** de f.

C.2 Par définition de p, on a pour tout $k \geqslant p$ $u_k = u_p$. Donc par le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^p\right)\right) = \dim(E) - \mathrm{rg}\left(f^p\right) = n - u_p = n - u_k = \dim(E) - \mathrm{rg}\left(f^k\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^k\right)\right).$$

On nous avons dans la question B.3 que pour tout $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}\left(f^p\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right) \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$. Donc par égalité des dimensions, on en déduit que pour tout $k \geqslant p$

$$\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right).$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f^p\right) \cap \mathrm{Im}\left(f^p\right)$. Alors on a d'une part $f^p(x) = 0_E$ et d'autre part il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Par conséquent, $f^{2p}(y) = f^p\left(f^p(x)\right) = f^p(x) = 0_E$. On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}\left(f^{2p}\right)$. Or par ce qui précède avec $k = 2p$, on a $\mathrm{Ker}\left(f^{2p}\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$. Donc $y \in \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ i.e. $f^p(y) = 0_E$. On en déduit donc que $x = f^p(y) = 0_E$. Par suite $\mathrm{Ker}\left(f^p\right) \cap \mathrm{Im}\left(f^p\right) = \{0_E\}$. Conclusion, $\boxed{\text{les espaces } \mathrm{Ker}\left(f^p\right) \text{ et } \mathrm{Im}\left(f^p\right) \text{ sont en somme directe.}}$

C.3 Par le théorème du rang, on a

$$\dim\left(\text{Ker }(f^p)\right) + \dim\left(\text{Im}\,(f^p)\right) = \dim(E)\,.$$

Or nous avons montré dans la question précédente que Ker $(f^p) \oplus \text{Im}\,(f^p)$. Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires à l'aide de la dimension, on en déduit que

$$\boxed{\dim\left(\text{Ker }(f^p)\right) \oplus \dim\left(\text{Im}\,(f^p)\right) = \dim(E)\,.}$$

C.4 (a) Soit $y \in \text{Im}\,(f^p)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. D'après la question précédente, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker }(f^p) \times \text{Im}\,(f^p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc par linéarité de f^p,

$$y = f^p(x) = f^p(x_1) + f^p(x_2) = 0_E + f^p(x_2) \qquad \textit{car } x_1 \in \textit{Ker }(f^p).$$

De plus $x_2 \in \text{Im}\,(f^p)$, donc il existe $x_3 \in E$ tel que $x_2 = f^p(x_1)$. Ainsi $y = f^p(x_2) = f^p(f^p(x_3)) = f^{2p}(x_3)$. Conclusion $\boxed{y \in \text{Im}\left(f^{2p}\right)}$.

(b) Soit $y \in \text{Im}\,(f^p)$. Alors par la question précédente, $y \in \text{Im}\left(f^{2p}\right)$. Or d'après la question B.2 et une petite récurrence, on a $\text{Im}\left(f^{2p}\right) \subseteq \text{Im}\left(f^{2p-1}\right) \subseteq \cdots \subseteq \text{Im}\left(f^{p+1}\right)$. On suppose $p \neq 0$ sinon cela signifie que $f = f^1 = f^0 = \text{Id}_E$ et dans ce cas la conclusion est immédiate. Donc $y \in \text{Im}\left(f^{p+1}\right)$. On a donc montré que

$$\text{Im}\,(f^p) \subseteq \text{Im}\left(f^{p+1}\right).$$

Réciproquement toujours par la question B.2, on a $\text{Im}\left(f^{p+1}\right) \subseteq \text{Im}\,(f^p)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}\,(f^p) = \text{Im}\left(f^{p+1}\right).}$$

NB : cette égalité pouvait s'obtenir directement à l'aide de l'égalité $u_p = u_{p+1}$ et de l'inclusion obtenue en B.2.

Partie D : Un exemple sur les polynômes

On suppose dans cette partie que $n \in \mathbb{N}^*$ et que $E = \mathbb{K}_n[X]$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit alors

$$\Delta : \begin{array}{l} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto \Delta(P) = P(X+1) - P(X). \end{array}$$

D.1 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda\left(P(X+1) - P\right) + \mu\left(Q(X+1) - Q\right) \\ &= \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)\,.\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\Delta \text{ est linéaire}}$.

D.2 Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$.

(a) On pose $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $P(X+1) = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$. On a par définition de P,

$$P(X+1) = \sum_{i=0}^{d} a_i (X+1)^i\,.$$

Par la formule du binôme de Newton, on obtient

$$P(X+1) = \sum_{i=0}^{d} a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{i} a_i \binom{i}{j} X^j$$

La somme étant triangulaire, l'interversion des indices nous donne

$$P(X+1) = \sum_{j=0}^{d}\sum_{i=j}^{d} a_i \binom{i}{j} X^j = \sum_{j=0}^{d}\left(\sum_{i=j}^{d} a_i \binom{i}{j}\right) X^j$$

Or par hypothèse $P(X+1) = \sum_{j=0}^{d} b_j X^j$. Donc par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que pour tout $j \in [\![0; d]\!]$,

$$\boxed{\forall j \in [\![0; d]\!], \qquad b_j = \sum_{i=j}^{d} a_i \binom{i}{j}}.$$

(b) On déduit de la question précédente que

$$\Delta(P) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j - \sum_{j=0}^{d} b_j X^j \sum_{j=0}^{d} (aj - b_j) X^j.$$

Pour tout $j \in [\![0;d]\!]$, le coefficient d'ordre j de $\Delta(P)$ est donc $a_j - b_j$. En particulier, par la question précédente, pour $j = d$,

$$a_d - b_d = a_d - \sum_{i=d}^{d} \binom{i}{d} a_i = a_d - \binom{d}{d} a_d = 0.$$

Donc on en déduit déjà que le degré de $\Delta(P)$ est inférieur à $d-1$. Calculons le terme suivant :

$$a_{d-1} - b_{d-1} = a_{d-1} - \sum_{i=d-1}^{d} \binom{i}{d-1} a_i = a_{d-1} - \binom{d-1}{d-1} a_{d-1} - \binom{d}{d-1} a_d = -da_d.$$

Puisque $d = \deg(P)$, nécessairement son terme dominant a_d est non nul. De plus par hypothèse $d \in \mathbb{N}^*$. Donc $-da_d \neq 0$. Ainsi le coefficient d'ordre $d-1$ de $\Delta(P)$ est non nul. Conclusion

$$\boxed{\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1.}$$

D.3 Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Posons $d = \deg(P)$. Si $d \geqslant 1$, on a vu à la question précédente que $\deg(\Delta(P)) = d - 1 \neq -\infty$. Donc $\Delta(P) \neq 0_{\mathbb{K}_n[X]}$. Donc $P \notin \operatorname{Ker}(\Delta)$. Réciproquement si $d \leqslant 0$ alors, il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que $P = C$. Donc

$$\Delta(P) = \Delta(C) = C - C = 0_{\mathbb{K}_n[X]}.$$

Ainsi $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. On a donc montré que $P \in \operatorname{Ker}(\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \deg(P) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathbb{K}_0[X]$. Conclusion

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X].}$$

D.4 Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Posons $d = \deg(P)$. Si $d \in \mathbb{N}^*$, alors par la question D.2, $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$. Si $d \leqslant 0$, alors $\Delta(P) = 0$ et donc dans tous les cas, $\deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P) - 1$. En itérant, on montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \deg\left(\Delta^k(P)\right) \leqslant \deg(P) - k.$$

En particulier, pour $k = n+1$, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$\deg\left(\Delta^{n+1}(P)\right) \leqslant \deg(P) - (n+1) \leqslant n - (n+1) = -1 < 0.$$

Ainsi, $\deg\left(\Delta^{n+1}(P)\right) = -\infty$ i.e. $\Delta^{n+1}(P) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$, ceci étant vrai pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on conclut que Δ^{n+1} est l'application nulle.

$$\boxed{\Delta^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}.}$$

D.5 Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\deg\left(\Delta^k(X^n)\right) = n - k$. On pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$: « $\deg\left(\Delta^k(X^n)\right) = n - k$ ».

Initialisation. Si $k = 0$ alors $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}$ par convention. Donc $\deg\left(\Delta^0(X^n)\right) \deg(X^n) = n = n - 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e. que $\deg\left(\Delta^k(X^n)\right) = n - k \geqslant n - (n-1) = 1$. Donc d'après la question D.2, en posant $P = \Delta^k(X^n)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\deg\left(\Delta^{k+1}(X^n)\right) &= \deg\left(\Delta\left(\Delta^k(X^n)\right)\right)\\ &= \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 = \deg\left(\Delta^k(X^n)\right) - 1 = n - k - 1 = n - (k+1).\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

De plus $\Delta^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$ et donc pour tout $k \geqslant n+1$, $\Delta^k = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$ et nécessairement $\deg\left(\Delta^{k+1}(X^n)\right) = -\infty$. Conclusion

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \deg\left(\Delta^k(X^n)\right) = \begin{cases} n - k & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ -\infty & \text{si } k \geqslant n+1. \end{cases}}$$

D.6 On a montré dans la question précédente que pour tout $k \leqslant n$, $\deg\left(\Delta^k\left(X^n\right)\right) = n - k \neq -\infty$. Donc pour tout $k \leqslant n$, $\Delta^k\left(X^n\right) \neq 0_{bbK_n[X]}$ et ainsi $X^n \notin \operatorname{Ker}\left(\Delta^k\right)$. D'où, pour tout $k \leqslant n$, $\operatorname{Ker}\left(\Delta^k\right) \neq \mathbb{K}_n[X]$. Or nous avons vu dans la question D.4 que $\operatorname{Ker}\left(\Delta^{n+1}\right) = \mathbb{K}_n[X]$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad \operatorname{Ker}\left(\Delta^k\right) \neq \operatorname{Ker}\left(\Delta^{n+1}\right).}$$

D.7 Par le théorème du rang, on en déduit que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$\operatorname{rg}\left(\Delta^k\right) = \dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) - \dim\left(\operatorname{Ker}\left(\Delta^k\right)\right) \neq \dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) - \dim\left(\operatorname{Ker}\left(\Delta^{n+1}\right)\right).$$

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $u_k = \operatorname{rg}\left(\Delta^k\right)$ ne stationne pas avant l'indice $n+1$. Notons p l'indice de Δ. On a donc $p \geqslant n+1$. Or $\Delta^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$ et par suite pour tout $k \geqslant n+1$, $\Delta^k = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$. Donc pour tout $k \geqslant n+1$, $u_k = \operatorname{rg}\left(0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}\right) = 0$. Conclusion, $\boxed{\text{l'indice de } \Delta \text{ vaut exactement } n+1.}$

On pose

$$\mathscr{B}_1 = \left(X^n, \Delta\left(X^n\right), \Delta^2\left(X^n\right), \ldots, \Delta^n\left(X^n\right)\right) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_2 = \left(X^n, (X+1)^n, \ldots, (X+2)^n, \ldots, (X+n)^n\right)$$

On pose également $\Delta_1 \in \mathscr{L}(E)$ définie pour tout $P \in E$ par $\Delta_1(P) = P(X+1)$.

D.8 (a) On sait d'après la question D.5 que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\deg\left(\Delta^k\left(X^n\right)\right) = n-k$. Par conséquent, la famille $\mathscr{B}_1$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. Ainsi $\mathscr{B}_1$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus

$$\operatorname{Card}\left(\mathscr{B}_1\right) = n+1 = \dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right).$$

On en déduit donc que $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } E = \mathbb{K}_n[X]}$.

(b) On commence par constater que $\Delta = \Delta_1 - \operatorname{Id}_E$. Donc par la formule de Leibniz pour les endomorphismes, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$\Delta^k = \left(\Delta_1 - \operatorname{Id}_E\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta_1^j \circ \left(-\operatorname{Id}_E\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \Delta_1^j.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \Delta_1^j.}$$

(c) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(j)$: « $\Delta_1^j\left(X^n\right) = (X+j)^n$ ». Démontrons que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(j)$ est vraie.

Initialisation. Si $j = 0$, alors par convention $\Delta_1^0 = \operatorname{Id}_E$ et donc $\Delta_1^0\left(X^n\right) = X^n = (X+0)^n$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(j)$ est vraie. Montrons alors que $\mathscr{P}(j+1)$ est vraie. PAr hypothèse de récurrence, en posant $P = \Delta_1^j\left(X^n\right)$, on a

$$P = (X+j)^n.$$

Donc

$$\Delta^{j+1}\left(X^n\right) = \Delta_1(P) = P(X+1) = ((X+1)+j)^n = (X+j+1)^n.$$

Donc $\mathscr{P}(j+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(j)$ est vraie.

Maintenant, par la question précédente, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a

$$\Delta^k\left(X^n\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \Delta_1^j\left(X^n\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \underbrace{(X+j)^n}_{\in \mathscr{B}_2} \in \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \Delta^k\left(X^n\right) \in \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_2\right).}$$

(d) On a montré dans la question précédente que pour tout $u \in \mathscr{B}_1$, $u \in \vec{t}(\mathscr{B}_2)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_1) \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_2)\,.$$

Or $\mathscr{B}_1$ est une base de E, donc $E = \mathrm{Vect}\,(scrB_1)$. Donc $E \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_2)$. La réciproque étant immédiate, on en déduit que

$$E = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_2)\,.$$

Donc $\mathscr{B}_2$ est une famille génératrice de E. Or Card $(B_2) = n+1 = \dim(E)$. Conclusion, $\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } E}$.

Partie E : Un contre-exemple (Facultatif)

On suppose ici que $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère la dérivation $D \in \mathscr{L}(E)$ définie pour tout $P \in E$, par $D(P) = P'$.

E.1 On vérifie facilement que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$D^k(P) = P^{(k)}.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$P \in \mathrm{Ker}\,\left(D^k\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad P^{(k)} = 0_{\mathbb{K}[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad P \in \mathbb{K}_{k-1}[X].$$

Donc

$$\mathrm{Ker}\,\left(D^k\right) = \mathbb{K}_{k-1}[X].$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$. Notons $d = \deg(P)$ et $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. Posons

$$Q = \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{(i+k)(i+k-1)\dots(i+1)} X^{i+k} = \sum_{i=0}^{d} a_i \frac{i!}{(i+k)!} X^{i+k} = \sum_{i=k}^{d+k} a_{i-k} \frac{(i-k)!}{i!} X^i$$

on vérifie alors que

$$D^k(Q) = P.$$

Donc $P \in \mathrm{Im}\,\left(D^k\right)$. De même si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Par conséquent, $\mathbb{K}[X] \subseteq \mathrm{Im}\,\left(D^k\right)$. La réciproque étant aussi vérifiée, on trouve que $\mathrm{Im}\,\left(D^k\right) = \mathbb{K}[X]$. En résumé

$$\mathrm{Im}\,\left(D^k\right) = \mathbb{K}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,\left(D^k\right) = \mathbb{K}_{k-1}[X].$$

Ainsi $\mathrm{Im}\,\left(D^k\right) \cap \mathrm{Ker}\,\left(D^k\right) = \mathbb{K}_{k-1}[X] \neq \left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\}$. Donc

$\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 1,\ \mathrm{Ker}\,\left(D^k\right) \text{ et } \mathrm{Im}\,\left(D^k\right) \text{ ne sont pas en somme directe et donc ne sont pas supplémentaires.}}$