Correction du Devoir Maison 11

Solution de l'exercice I

Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient p boules blanches distinctes, numérotées de 1 à p et q boules noires distinctes numérotées de 1 à q. Soit $r \in [\![0;p+q]\!]$.

I.1 On tire de façon simultanée r boules dans l'urne.

(a) Toutes les boules sont distinctes. On effectue donc un tirage simultané (et donc sans remise) de r éléments dans un ensemble à $p+q$ éléments. $\boxed{\text{On obtient donc } \binom{p+q}{r}, \text{ possibilités.}}$

(b) On suppose $r \in [\![0;\min(p,q)$ et on fixe $i \in [\![0;r]\!]$. Pour former un tas de r boules dont i exactement sont blanches, on pioche simultanément i boules parmi p blanches de notre urne on a donc $\binom{p}{i}$ choix. Puis on pioche les $r-i$ boules qu'il nous faut pour terminer notre tas de r boules parmi les q boules noires de notre urne. On a alors $\binom{q}{r-i}$ possibilités.

Conclusion, le nombre de tas de r boules dont i exactement sont blanches est

$$\binom{p}{i}\binom{q}{r-i}.$$

(c) Dans un tas de r boules distinctes, on a soit 0 boule blanche, soit 1 boule blanche, ..., soit n boules blanches. Notons R l'ensemble des tas à r boules et pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, R_i l'ensemble des tas à r boules dont i exactement sont blanches. La considération précédente se formalise par

$$R = \bigsqcup_{i \in [\![0;r]\!]} R_i.$$

Donc

$$\text{Card }(R) = \sum_{i=0}^{r} \text{Card }(R_i).$$

Or on a vu dans les questions précédentes que Card $(R) = \binom{p+q}{r}$ et Card $(R_i) = \binom{p}{i}\binom{q}{r-i}$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.}$$

(d) Notamment si $p=q=r=n$ l'égalité précédente s'écrit,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Or on sait que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.}$$

I.2 On suppose maintenant que les r tirages sont successifs et sans remise.

(a) Puisque l'on effectue r tirages, successifs, sans remise, parmi $p+q$ boules toutes distinctes, chaque tirage est un arrangement de r parmi $p+q$. $\boxed{\text{On a donc } A_{p+q}^r = \frac{(p+q)!}{(p+q-r)!} \text{ tirages possibles.}}$

(b) Le nombre de tirages avec au moins une boule blanche est égal au nombre total de tirage moins le nombre de tirages sans aucune boule blanche. Pour obtenir un tirage sans aucune boule blanche, il faut piocher r boule noires parmi les q possibles. Le tirage est successif sans remise, on a donc A_q^r tirages possibles sans aucune boule blanche (avec la convention $A_q^r = 0$ si $r > q$.

$\boxed{\text{Conclusion on a } A_{p+q}^r - A_q^r \text{ tirages qui contiennent au moins une boule blanche.}}$

Exercice II (Combinatoire)

Le perroquet du capitaine Haddock ne possédant que 9 mots dans son vocabulaire.
Des mots de la vie courante

« dring » « allô » « caramba »

mais aussi et surtout issus des expressions du capitaine :

« mille-sabords » « tonnerre » « boit-sans-soif »
« ectoplasme » « moule-à-gauffre » « bachi-bouzouk »

On suppose que chaque phrase du perroquet contient six mots (éventuellement plusieurs fois le même).

II.1 Construire une phrase du perroquet revient à faire un tirage successif, avec remise, de six mots parmi les 9 de son vocabulaire i.e. un 6-uplet d'éléments d'un ensemble de cardinal 9. Donc

$\boxed{\text{le perroquet peut prononcer } 9^6 \text{ phrases différentes.}}$

II.2 (a) Pour que les six mots soient différents, il faut et il suffit de faire un tirage successif sans remise de 6 mots parmi les 9 de son vocabulaire. $\boxed{\text{Il y a donc } A_9^6 = \frac{9!}{3!} \text{ possibilités.}}$

(b) *Méthode 1.* Pour construire une phrase de 6 mots donc exactement 5 sont différents, il en faut exactement deux mots identiques dans la phrase. On choisit le mot qui sera répété, on en prend donc 1 parmi les 9 : 9 choix possibles ($\binom{9}{1}$ ou A_9^1 ou 9^1). Ensuite, il nous faut placer ses deux mots dans la phrase, on choisit donc deux places parmi les 6 possibles. Attention puisque les deux mots ainsi placés sont identiques l'ordre de l'un par rapport à l'autre ne compte pas. Donc le choix des deux places est un tirage simultané : $\binom{6}{2}$ choix. Ensuite, on choisit les 4 autres mots tous distincts parmi les 8 mots restant que l'on range dans les 4 places restantes. Cela constitue donc un arrangement de 4 parmi 8 : A_8^4 (ou de façon équivalente d'une combinaison de 4 parmi 8 pour le tirage des mots puis d'une permutation de ces 4 mots : $\binom{8}{4} \times 4!$). On obtient alors au total

$$9 \times \binom{6}{2} \times A_8^4 = 9 \times \frac{6!}{2!4!}\frac{8}{4!} = 9 \times 5 \times 3 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = \frac{5 \times 9!}{8}.$$

Méthode 2. On choisit les 5 mots qui constitueront notre phrases : $\binom{9}{5}$ choix possibles. Parmi ces 5 mots, on en choisit un qui sera répété une seconde fois : 5 choix possibles. On choisit les places de nos deux mots identiques : $\binom{6}{2}$ choix possibles puis l'on range les autres mots dans les dernières places disponibles $A_4^4 = 4!$ choix. Au total, on retrouve

$$\binom{9}{5} \times 5 \times \binom{6}{2} \times 4! = \frac{9!}{5!4!} \times 5 \times \frac{6!}{2!4!} \times 4! = \frac{5 \times 9!}{8}.$$

Dans tous les cas, $\boxed{\text{le nombre de phrases comprenant exactement 5 mots différents est } \frac{5 \times 9!}{8}.}$

(c) Le nombre de phrases comprenant au moins cinq mots vaut le nombre de phrases comprenant exactement 5 mots différents plus le nombre de phrases comprenant exactement 6 mots différents, soit au total, par les question précédentes :

$$\frac{9!}{3!} + \frac{5 \times 9!}{8} = 9!\left(\frac{4}{24} + \frac{15}{24}\right) = 9!\frac{19}{24}.$$

$\boxed{\text{Conclusion, } 9!\frac{19}{24} \text{ phrases contiennent au moins cinq mots différents.}}$

II.3 On suppose dans cette question que le perroquet n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « mille-sabords » et que toutes les autres expressions proviennent de la vie courante.

(a) Soit $p \in [\![0;6]\!]$. On choisit les p places occupées par le mot « mille-sabords » parmi les 6 possibles. Le tirage est simultané car l'ordre ne compte pas (on place le même mot). Donc $\binom{6}{p}$ choix possibles. Puis on construit une phrase de $6-p$ mots parmi les 3 mots de la vie courante. Cela constitue un tirage successif, avec remise de $6-p$ mots parmi les 3 de la vie courante : 3^{6-p} choix.

$\boxed{\text{Au total, on a donc } \binom{6}{p}3^{6-p} \text{ choix possibles pour construire une phrase contenant exactement } p \text{ fois le mot « mille-sabords » et que des mots de la vie courante.}}$

(b) Par la formule du binôme de Newton, on a directement

$$4^6 = (3+1)^6 = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 1^p 3^{6-p} = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}.$$

Par un raisonnement combinatoire : on considère A l'ensemble des phrases du perroquet non contenant que le mot « mille-sabords » et des mots de la vie courante. Pour construire une phrase du perroquet, il faut donc effectuer un tirage successif, avec remise de 6 mots parmi les 4 constituer par l'ensemble formé des mots « mille-sabords », « dring », « dring » et « caramba ». On a donc 4^6 choix :

$$\text{Card }(A) = 4^6.$$

Or en notant A_p l'ensemble des phrases du perroquet contenant exactement p fois le mot « mille-sabords », on a $A = \bigsqcup_{p\in[\![0;6]\!]} A_p$. Donc

$$\text{Card }(A) = \sum_{p=0}^{6} \text{Card }(A_p).$$

Or par la question précédente, Card $(A_p) = \binom{6}{p} 3^{6-p}$. Conclusion, on retrouve que

$$\boxed{4^6 = \text{Card }(A) = \sum_{p=0}^{6} \text{Card }(A_p) = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} 3^{6-p}.}$$

Exercice III (Séries)

Rappel des épisodes précédents : nous nous étions arrêtés en plein suspens dans l'épisode précédent (DM6), nous avions étudié la série harmonique et montré que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1),$$

où γ est un réel fixé entre $[0;1]$. Oui mais que se cache derrière la constante ? Quel est le terme suivant du développement limité de la série harmonique ? Ce problème propose d'établir à nouveau le résultat ci-dessus (par une autre méthode naturellement) et d'aller chercher le terme suivant.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = H_n - \ln(n).$$

III.1 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} - \gamma_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Or on sait que $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^2}{2}$ et $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1 - u + o(u)$. Donc en posant $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} - \gamma_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.}$$

(b)
- Par la question précédente, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2n^2} < 0$.
- La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{2n^2}$ converge.
- Deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant sont de même nature.

$$\boxed{\text{Conclusion, la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \text{ converge.}}$$

(c) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ est une série télescopique donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = \gamma_{n+1} - \gamma_1 = \gamma_{k+1} - H_1 + \ln(1) = \gamma_{k+1} - 1.$$

Par la question précédente, la suite des sommes partielles, $\left(\sum_{k=1}^{n} (\gamma_{k+1} - \gamma_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et par définition sa limite est $\sum_{k=1}^{+\infty} (\gamma_{k+1} - \gamma_k)$. On en déduit donc que $\boxed{(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et de plus

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \sum_{k=1}^{+\infty} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) + 1.$$

(d) Par définition de γ, on a $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ i.e.

$$H_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$$

ou encore

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right).$$

III.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités suivantes

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = H_n - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

On reconnait alors dans la seconde somme, une somme télescopique. Donc

$$S_n = H_n - \ln(n+1) - \ln(1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = H_n - \ln(n+1).}$$

III.3 De la question précédente, on en déduit que

$$S_n = H_n - \ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = H_n - \ln(n) - \frac{1}{n} = \gamma_n - \frac{1}{n}.$$

Donc d'après la question III.1c, on obtient par définition de γ,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \gamma - 0.$$

Autrement dit, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et de plus

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \gamma.}$$

III.4 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{x-(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x^2}\frac{x-x-1}{x+1} = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{x+1}.$$

En particulier pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or on a

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x) = \frac{1 + x\ln(x)}{x} - \ln(1+x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$$

et de plus

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion,

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$ 0

III.5 Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{1}{t} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \frac{1}{t} - \ln(t+1) + \ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [\ln(t) + t\ln(t) - t]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \ln(t+1)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Par le changement de variable $s = t+1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= (b+1)\ln(b) - b - (a+1)\ln(a) + a - \int_{a+1}^{b+1} \ln(s)\,\mathrm{d}t\\ &= (b+1)\ln(b) - b - (a+1)\ln(a) + a - [s\ln(s) - s]_{s=a+1}^{s=b+1}\\ &= (b+1)\ln(b) - b - (a+1)\ln(a) + a - (b+1)\ln(b+1) + b + 1 + (a+1)\ln(a+1) - a - 1.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b+1)\ln\left(\frac{b}{b+1}\right) - (a+1)\ln\left(\frac{a}{a+1}\right).}$$

III.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant N$. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question III.4 donc sur $[n; N+1]$. Or $\sum_{k=n+1}^{N} u_k = \sum_{k=n+1}^{N} f(k)$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale,

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc à l'aide du calcul de la question précédente en prenant d'une part $a = n+1$ et $b = N+1$ et d'autre part $a = n$ et $b = N$, on obtient que, pour tout $N \geqslant n$,

$$\boxed{(N+2)\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) - (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - (n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).}$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_k$.

III.7 Par définition, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$. Posons pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $a_N = (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N}, \qquad a_N &= (N+1)\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}}\right)\\
&= (N+1)\ln\left(1 - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\\
&= (N+1)\left(-\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\\
&= -1 + o\left(1\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{N\to+\infty} (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} a_N = -1$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} (N+2)\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = \lim_{N\to+\infty} a_{N+1} = -1.$$

Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'inégalité obtenue à la question précédente, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-1 - (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leqslant R_n \leqslant -1 - (n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (n+2)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 \leqslant R_n \leqslant (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.}$$

III.8 De l'inégalité de la question précédente, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2n\left[(n+2)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1\right] \leqslant 2nR_n \leqslant 2n\left[(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right].$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = 2n\left[(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right].$$

On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
b_n &\underset{n\to+\infty}{=} 2n\left[(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right]\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2n\left[(n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right]\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2n\left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2n\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 + o\left(1\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$2n\left[(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1\right] = b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

De plus, on observe également que

$$2n\left[(n+2)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1\right] = \frac{2n}{2\left(n+1\right)}b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1.$$

Or nous avions

$$\frac{2n}{2\left(n+1\right)}b_{n+1} \leqslant 2nR_n \leqslant b_n.$$

Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 2nR_n = 1$$

Conclusion,

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

III.9 Par propriété du reste d'une série convergente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Donc d'après la question III.3, et la définition de S_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \gamma - S_n.$$

Donc par la question III.2,

$$R_n = \gamma - H_n + \ln(n+1).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} H_n &= \ln(n+1) + \gamma - R_n \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$