Correction du Devoir Maison 12

Solution de l'exercice I

L'objectif du problème est de déterminer un équivalent de $n!$. La première partie établie un équivalent à une constante près sans déterminer la constante. La seconde partie consiste à calculer explicitement cette constante.

Partie A : un équivalent

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n} n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

IA.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de v_n et de u_n,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}\,(n+1)^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n-1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{(n+1)^n\,(n+1)}{n^n}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-1}\right) \\ &= -1+\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).}$$

IA.2 On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o\left(u^3\right)$. En posant $n \to +\infty$, $u = \frac{1}{n} \to 0$. Donc

$$\begin{aligned} v_n = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -1+1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.}$$

IA.3 On sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha > 2$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{12n^2}$ converge également. Or $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{12n^2} > 0$. Or deux séries dont les termes généraux sont équivalents et de signe constant ont même nature. Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \text{ converge}}$.

IA.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}j$,

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est une série télescopique. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \ln(u_{n+1}) - \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \ln(u_{n+1}) - 1.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 2$,
$$u_n = \mathrm{e}^{1+\sum_{k=1}^{n-1} v_k}.$$
Or nous avons vu à la question précédente que $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Donc par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ de plus,
$$\boxed{C = \lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{1+S}.}$$

IA.5 D'après la question précédente $C = \mathrm{e}^{1+S} > 0$ (très important !!!). On a donc
$$u_n = \frac{\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} C \qquad \Leftrightarrow \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C}\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}.$$
En posant $\alpha = \frac{1}{C} = \mathrm{e}^{-1-S} > 0$, on obtient bien
$$\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}.}$$

Partie B : calcul de α

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

IB.1 On a sans difficulté,
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
D'autre part,
$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{pi}{2}} = -\cos\left(\frac{pi}{2}\right) + \cos(0) = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad I_1 = 1.}$$
Bonus :
$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

IB.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $s = \frac{\pi}{2} - t$. Alors $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$ et donc
$$I_n = \int_{s=\frac{\pi}{2}}^{s=0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - s\right)(-\mathrm{d}s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(s))^n\,\mathrm{d}s.$$
car pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos(s)$. Ainsi,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(s)\,\mathrm{d}s.}$$

IB.3 Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
$$0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1.$$
Donc par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0;1]$,
$$0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant 1. \tag{1}$$
Donc par croissance de l'intégrale,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
Donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2}.}$$
Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0) et majorée (par $\frac{\pi}{2}$) et $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc bornée}}$.

IB.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu à la question précédente que $I_n \geqslant 0$. Procédons par l'absurde et supposons que $I_n = 0$. Alors la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est une fonction continue et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (vu lors de l'inégalité (1) à la question précédente) et par hypothèse $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc par la propriété de séparation de l'intégrale, on en déduit que $t \mapsto \sin^n(t)$ est identiquement nulle sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Or pour $t = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$ ce qui est contradictoire. D'où, $I_n \geqslant 0$ et $I_n \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0.}$$

IB.5 On sait que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1.$$

Donc pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t) \leqslant 1.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2}.}$$

IB.6 D'après la question précédente, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

On note ℓ sa limite.

IB.7 Soit $\varepsilon > 0$.

(a) On part à nouveau de l'inégalité énoncé précédemment que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant 1.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, elle est notamment vérifiée pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens : $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$),

$$0 \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \varepsilon\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\,.}$$

(b) La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0; 1]$. Donc par composition, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc sur est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$. Ainsi, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$,

$$0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\mathrm{d}t = \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} 1\,\mathrm{d}t = \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

Or, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \frac{\pi}{2}$. De plus $\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \geqslant 0$ donc

$$\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\frac{\pi}{2}.}$$

(c) Par la relation de Chasles,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc d'après les inégalités précédentes, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \varepsilon + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Or par la stricte croissance de la fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$$

Donc la suite $\left(\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \in]0;1[$ et donc converge quand $n \to +\infty$ vers 0. On sait d'autre part que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Donc par passage à la limite dans (2), on obtient

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant \varepsilon\,.}$$

(d) L'inégalité précédente étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, par le théorème d'encadrement que

$$\boxed{\ell = 0.}$$

IB.8 On pose pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u(t) = -\cos(t), \qquad v(t) = \sin^{n+1}(t).$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u'(t) = \sin(t), \qquad v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t).$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\,(n+1)\cos(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{car dans } \sin n+1(t),\ n+1 \geqslant 1 \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(t)\right)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (n+1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t\right] \qquad \textit{par linéarité de l'intégrale} \\
&= (n+1)\,I_n - (n+1)\,I_{n+2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_{n+2} + (n+1)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n \quad \Leftrightarrow \quad (n+2)\,I_{n+2} = (n+1)\,I_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.}$$

IB.9 On a vu à la question IB.5 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

En injectant l'équation obtenue à la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \frac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

Or on a vu à la question IB.4 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.}$$

IB.10 (a) On procède par récurrence. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(p) \qquad : \qquad « \; I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \; ».$$

Montrons que $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Initialisation. Si $p = 0$,

$$\frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} = 1.$$

Donc par la question IB.1, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ et montrons $\mathscr{P}(p+1)$. On a par la relation établie en IB.8,

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} &\underset{\text{H.R.}}{=} \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2} \times \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{4(p+1)^2} \times \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{4^{p+1} ((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{4^{p+1} ((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} &\underset{\text{H.R.}}{=} \frac{(2p+2)^2}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{4^{p+1} ((p+1)!)^2}{(2p+3)!}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

(b) Par la question précédente et la question IA.5, on a

$$\begin{aligned} I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\sqrt{2p}\,(2p)^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}}{4^p \left(\alpha\sqrt{p}p^p\,\mathrm{e}^{-p}\right)^2} \frac{\pi}{2} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\sqrt{2p}4^p p^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}}{4^p \alpha^2 p \times p^{2p}\,\mathrm{e}^{-2p}} \frac{\pi}{2} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2p}}{\alpha p} \frac{\pi}{2} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

D'autre part, de la même façon, on a

$$\begin{aligned} I_{2p+1} = \frac{4^p\,(p!)^2}{(2p+1)!} &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{4^p\left(\alpha\sqrt{p}p^p\,\mathrm{e}^{-p}\right)^2}{\alpha\sqrt{2p+1}(2p+1)^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-2p-1}} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{4^p\alpha^2 p\times p^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-2p}}{\alpha\sqrt{2p+1}\,(2p)^{2p+1}\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p+1}\mathrm{e}^{-2p-1}} \\ &\underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{2p+1}\times 2\left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p+1}\mathrm{e}^{-1}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p+1} = \mathrm{e}^{(2p+1)\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)} &\underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{(2p+1)\left(\frac{1}{2p}+o\left(\frac{1}{p}\right)\right)} \\ &\underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{1+o(1)} \\ &\underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{e}^1\,\mathrm{e}^{o(1)} \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{e}^1\left(1+o\left(1\right)\right) \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{e}^1+o\left(1\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^1. \end{aligned}$$

De plus $\sqrt{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2p}$. Par conséquent,

$$I_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{\sqrt{2p}\times 2\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Conclusion, on a

$$\boxed{I_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{p}} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{p}}.}$$

(c) Donc de la question précédente et par quotient d'équivalents,

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{p}}\times\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{p} = \frac{2\pi}{\alpha^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{2\pi}{\alpha^2}.}$$

IB.11 Or d'après la question IB.9, la limite de $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ quand p tend vers $+\infty$ vaut 1. Donc par unicité de la limite,

$$\frac{2\pi}{\alpha^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha^2 = 2\pi.$$

De plus par la question IA.5, $\alpha = \frac{1}{C} = \mathrm{e}^{-1-S} > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\alpha = \sqrt{2\pi}.}$$

Joli non ?

Solution de l'exercice II

Dans une mare du château de Moulinsart, vivent des grenouilles. Le Professeur Tournesol souhaite étudier la population de ces grenouilles. Leur présence dans cette mare est fortement conditionnée à la météo. Pour son modèle, le Professeur Tournesol suppose qu'il y a trois météo distinctes : il fait beau, il pleut, il neige. Il constate également que chaque jour, la météo change (on interdit d'avoir deux jours consécutifs avec la même météo) et la météo du lendemain est prise de façon équiprobable parmi les deux autres météo possibles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{array}{ll} A_n & : \text{« il pleut le jour } n \text{ »} \\ B_n & : \text{« il fait beau le jour } n \text{ »} \\ C_n & : \text{« il neige le jour } n \text{ »} \end{array}$$

On pose enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \mathbb{P}(A_n), \qquad q_n = \mathbb{P}(B_n), \qquad r_n = \mathbb{P}(C_n).$$

Partie A : mise en place de la chaîne de Markov.

IIA.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé s'il pleut le jour n alors on n'a aucune chance qu'il pleuve le lendemain. S'il a fait beau le jour n alors on a une chance sur deux qu'il pleuve le lendemain et s'il a neigé, on a une chance sur deux qu'il pleuve le lendemain. D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = 0 \qquad \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n) = \frac{1}{2}.}$$

IIA.2 On suppose dans cette question uniquement que $p_0 = 1/5$, $q_0 = 1/5$.

(a) Les évènements A_0, B_0 et C_0 forment un système complet d'évènements incompatibles. Par conséquent,

$$1 = \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(C_0) = p_0 + q_0 + r_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r_0 = 1 - p_0 - q_0 = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{r_0 = \frac{3}{5}.}$$

(b) Les évènements A_0, B_0 et C_0 forment un système complet d'évènements incompatibles. Donc par la formule des probabilités totales,

$$p_1 = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \mid A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1 \mid B_0)\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(A_1 \mid C_0)\mathbb{P}(C_0).$$

D'après la question IIA.1,

$$p_1 = 0 \times p_0 + \frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}r_0 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{p_1 = \frac{2}{5}.}$$

(c) L'évènement $A_0 \cap B_0$ correspond au fait qu'il pleuve ET qu'il fasse beau simultanément ce qui est exclu. Cet évènement étant impossible,

$$\mathbb{P}(A_0 \cap B_0) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(B_0) = p_0 \times q_0 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

Donc $\mathbb{P}(A_0 \cap B_0) \neq \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(B_0)$. Conclusion, $\boxed{\text{les évènements } A_0 \text{ et } B_0 \text{ ne sont pas indépendants}}$.

(d) Par la question IIA.2.(b), $\mathbb{P}(A_1) = p_1 = \frac{2}{5}$. De plus $\mathbb{P}(B_0) = q_0 = \frac{1}{5}$. Donc

$$\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(B_0) = \frac{2}{25}.$$

De plus, d'après ce qui précède, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B_0) = \mathbb{P}(A_1 \mid B_0)\mathbb{P}(B_0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B_0) \neq \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(B_0).$$

Conclusion, $\boxed{\text{les évènements } A_1 \text{ et } B_0 \text{ ne sont pas indépendants.}}$

(e) On cherche la probabilité qu'au jour 0 il ait fait beau sachant qu'au jour 1, il a neigé i.e. on cherche $\mathbb{P}(B_0 \mid C_1)$. Rappelons que (A_0, B_0, C_0) forme un système complet d'évènements incompatibles. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_1) &= \mathbb{P}(C_1 \mid A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(C_1 \mid B_0)\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(C_1 \mid C_0)\mathbb{P}(C_0)\\ &= \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}q_0 + 0 \times r_0\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\\ &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Notamment C_1 n'est pas négligeable. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(B_0 \mid C_1) = \frac{\mathbb{P}(C_1 \mid B_0)\mathbb{P}(B_0)}{\mathbb{P}(C_1)} = \frac{\frac{1}{2}p_0}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_0 \mid C_1) = \frac{1}{2}.}$$

On suppose maintenant et pour le reste du problème qu'au jour 0, il pleut.

IIA.3 (a) Au jour 0 il pleut. On a donc une chance sur deux qu'il fasse beau au jour 1 et une chance sur 2 qu'il neige au jour 1 et aucune chance qu'il pleuve au jour 1 :

$$\boxed{p_1 = 0 \qquad q_1 = \frac{1}{2} \qquad r_1 = \frac{1}{2}.}$$

(b) La famille (A_1, B_1, C_1) forme un système complet d'évènements incompatibles. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_2 \mid C_1)\mathbb{P}(C_1)\\ &= 0 \times p_1 + \frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}r_1\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid C_1)\mathbb{P}(C_1) = \frac{p_1 + r_1}{2} = \frac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(C_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(C_2 \mid C_1)\mathbb{P}(C_1) = \frac{p_1 + q_1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$p_2 = \frac{1}{2} \qquad q_2 = \frac{1}{4} \qquad r_2 = \frac{1}{4}.$$

NB : puisque (A_2, B_2, C_2) est un système complet d'évènements incompatibles, on vérifie bien que $p_2 + q_2 + r_2 = 1$.

IIA.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille (A_n, B_n, C_n). Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{q_n + r_n}{2}\\ q_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{p_n + r_n}{2}\\ r_{n+1} &= \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n) = \frac{p_n + q_n}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+1} = \frac{q_n + r_n}{2} \\ q_{n+1} = \frac{p_n + r_n}{2} \\ r_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}. \end{cases}}$$

Partie B : comportement asymptotique par diagonalisation.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

IIB.1 (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$AX_n = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_n+r_n}{2} \\ \frac{p_n+r_n}{2} \\ \frac{p_n+q_n}{2} \end{bmatrix}.$$

Donc d'après la question précédente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad AX_n = \begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = X_{n+1}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathscr{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ». Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, alors $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $X_n = A^n X_0$. Alors, d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = AX_n = A\left(A^n X_0\right) = A^{n+1} X_0.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

D'où,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.}$$

On identifie $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^3$ et on pose $E = \mathbb{R}^3$ et considère alors l'application suivante

$$\varphi \quad : \quad \begin{cases} E & \to E \\ X & \mapsto AX \end{cases}.$$

IIB.2 (a) L'application φ est bien définie et si $X \in E$, alors $AX \in E$. Donc φ va bien de E dans E. De plus pour tout $(X, Y) \in E^2$ et tout (λ, μ), on a

$$\varphi(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda \varphi(X) + \mu \varphi(Y).$$

Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

(b) Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad & \Leftrightarrow \quad \varphi(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad AX = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{y+z}{2} = 0 \\ \frac{x+z}{2} = 0 \\ \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+z = 0 \\ z = -x \\ y = -x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ z = -x \\ y = -x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker }(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.}$$

(c) Puisque f est un endomorphisme, $\dim(E) = \dim(E) < \infty$. Donc d'après le cours, f est bijective si et seulement si f est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul. Donc par la question précédente, f est bien bijective et on sait que f est un endomorphisme. Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme}}$.

Définition II.1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit λ est une valeur propre de φ si et seulement si

$$\text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$

IIB.3 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ deux valeurs propres de φ. On suppose que $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in \text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E) \cap \text{Ker }(\varphi - \mu\text{Id}_E)$. D'une part $x \in \text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E)$ donc $\varphi(x) - \lambda\,x = 0_E$ i.e. $f(x) = \lambda\,x$. D'autre part, $x \in \text{Ker }(\varphi - \mu\text{Id}_E)$ donc de même $\varphi(x) = \mu x$. Ainsi,

$$\lambda\,x = \mu x \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda - \mu)\,x = 0_E \quad\Leftrightarrow\quad x = 0_E,$$

car $\lambda \neq \mu$. Donc $\text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E) \cap \text{Ker }(\varphi - \mu\text{Id}_E) \subseteq \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est également vérifiée car $\text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E) \cap \text{Ker }(\varphi - \mu\text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E) \cap \text{Ker }(\varphi - \mu\text{Id}_E) = \{0_E\}$. Conclusion, $\boxed{\text{Ker }(\varphi - \lambda\,\text{Id}_E) \text{ et Ker }(\varphi - \mu\text{Id}_E) \text{ sont en somme directe}}$.

IIB.4 Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \text{Ker }(\varphi - \text{Id}_E) &\Leftrightarrow \varphi(X) - X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow AX - X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow (A - I_3)\,X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ y = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y = z.
\end{aligned}$$

Le vecteur $(1, 1, 1)$ engendre donc $\text{Ker }(\varphi - \text{Id}_E)$ et comme il est non nul, il est une base de $\text{Ker }(\varphi - \text{Id}_E)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker }(\varphi - \text{Id}_E) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

Notamment $\text{Ker}\,(\varphi - \text{Id}_E) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc $\boxed{1 \text{ est bien une valeur propre de } \varphi}$.

De la même façon, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E$. On a

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}\left(\varphi + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(A + \frac{1}{2}I_3\right) X = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x+y+z}{2} = 0 \\ \frac{x+y+z}{2} = 0 \\ \frac{x+y+z}{2} = 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad z = -x - y. \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}\,(\varphi + \frac{1}{2}\text{Id}_E) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ les deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\text{Ker}\,(\varphi + \frac{1}{2}\text{Id}_E)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker}\left(\varphi + \frac{1}{2}\text{Id}_E\right) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

Notamment $\text{Ker}\,(\varphi + \frac{1}{2}\text{Id}_E) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est bien une valeur propre de } \varphi}$.

On pose $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

IIB.5 On a les équivalences matricielles suivantes :

$$\begin{array}{rlcrl}
P = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & & I_3 = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} & \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est bien inversible}}$. De plus, on a

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.}$$

IIB.6 On a les calculs matriciels suivants :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.}$$

$\boxed{\text{On retrouve sur la diagonale les deux valeurs propres précédemment déterminées.}}$

IIB.7 Puisque $A = PDP^{-1}$, on démontre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Donc par la question IIB.1.(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0.}$$

On démontre également par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix}$. De plus, par hypothèse, $X_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ 1 - \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}(2-1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \end{bmatrix}.}$$

IIB.8 On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$. Donc par définition de X_n et la question précédente, on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = \frac{1}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}.}$$

On dit que la chaîne de Markov converge vers sa mesure invariante qui est ici uniforme sur les trois météo possibles. On observe alors que la dépendance en l'état initial se dissipe peu à peu et asymptotiquement peu importe la météo initiale, on obtient la même probabilité pour les trois états possibles. Ceci est un résultat général.

Partie C : détermination de la probabilité par une suite arithmético-géométrique

On se propose dans cette partie de déterminer directement une formule de p_n en fonction de n. Les résultats de la partie précédente ne pourront pas être exploités.

IIC.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements incompatibles. Donc

$$r_n = \mathbb{P}(C_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) = 1 - p_n - q_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = 1 - p_n - q_n.}$$

IIC.2 D'après la question IIA.4, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = \frac{q_n + r_n}{2} = \frac{p_n + 1 - p_n - q_n}{2} = \frac{1-p_n}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = \frac{1-p_n}{2}.}$$

IIC.3 On reconnait donc dans la question précédente une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\omega = \frac{1-\omega}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\omega = 1 - \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{3}.$$

On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n - \frac{1}{3}$. Puisque $1/3$ est un point fixe de la relation de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1-p_n}{2} - \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{p_n - \frac{1}{3}}{2} = -\frac{u_n}{2}.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-1/2$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 u_0 = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(p_0 - \frac{1}{3}\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right).$$

Ceci est bien cohérent avec le résultat de la partie B. On conclut donc bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n == \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right).}$$

Partie D : et les grenouilles alors ? (facultatif)

On note S_n le nombre de grenouilles à la fin du jour n. On pose $S_0 = 2$. Le Professeur Tournesol remarque le comportement suivant, si la journée n a été pluvieuse alors la population augmente d'un individu, $S_n = S_{n-1} + 1$ (jour pluvieux, jour heureux dit la grenouille). S'il a fait beau temps, la population diminue d'un individu $S_n = S_{n-1} - 1$ et s'il neige la population diminue de trois individus $S_n = S_{n-1} - 3$. On considère toujours que le jour 0 fut un jour pluvieux. On note enfin T_n l'évènement : « la population de grenouille est toujours restée strictement positive pendant les n premiers jours ».

IID.1 La famille (A_1, B_1, C_1) forme un système complet d'évènements incompatibles. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}(T_1 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(T_1 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(T_1 \mid C_1)\mathbb{P}(C_1).$$

Mais puisque A_0 est réalisé avec probabilité 1, on obtient que $\mathbb{P}(A_1) = 0$ et $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{2}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \mid B_1) + \mathbb{P}(T_1 \mid C_1)}{2}.$$

Si B_1 est réalisé, alors $S_1 = S_0 - 1 = 2 - 1$. Dans ce cas, nous avons une grenouille et donc T_1 est réalisé. Si C_1 est réalisé, alors $S_1 = S_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ ce qui signifie que toutes les grenouilles sont partis et que donc T_1 n'est pas réalisé. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.}$$

IID.2 Nous avons vu à la question précédente que T_1 est réalisé si et seulement si B_1 est réalisé id est $T_1 = B_1$ et dans ce cas $S_1 = 1$. Le jour suivant il est donc possible qu'il pleuve (avec probabilité $1/2$) ou qu'il neige (avec probabilité $1/2$). S'il pleut alors la population augmente de 1, $S_2 = S_1 + 1 = 1 + 1 = 2$, nous obtenons deux grenouilles et donc T_2 est réalisé. S'il neige alors la population diminue de 3, $S_2 = S_1 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$, donc T_1 n'est pas réalisé. Au bilan, T_2 est réalisé que si $T_1 = B_1$ est réalisé et si A_2 (il pleut le jour 2) est réalisé. Donc

$$\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{2^2}.}$$

Dans ce cas, on retourne à l'état initial, $\boxed{S_2 = 2 = S_0 \text{ et } A_2 \text{ est réalisé.}}$

IID.3 En itérant le raisonnement précédent, on conjecture que

$$T_n = \begin{cases} A_n \cap B_{n-1} \cap \cdots \cap B_1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ B_n \cap A_{n-1} \cap \cdots \cap B_1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Puisque l'on a toujours une probabilité $1/2$ de passer de B_i à A_{i+1} et de même une probabilité de $1/2$ de passer de A_i à B_{i+1}, on obtient donc si n est pair,

$$\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(A_n \mid B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1} \mid A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2^n}.$$

De même si n est impair

$$\mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}(B_n \mid A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1} \mid B_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_n) = \frac{1}{2^n}.}$$

On a donc une probabilité de survie qui converge géométriquement (i.e. de façon exponentielle $\mathrm{e}^{-n\ln(2)}$) vers 0. La mare n'a donc aucune de rester éternellement peuplée (snif).