Devoir Maison 13

A faire pour le Mardi 28/05

On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et on considère l'application par

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E \to E \\ & & f \mapsto \varphi(f)\,, \end{array}$$

où $\varphi(f)$ est une fonction de E définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$\begin{array}{rcl} \varphi(f) & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & & x \mapsto \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

Partie A : Intégration, fonction réelle

A.1 Démontrer proprement que φ est bien définie.

A.2 Soit $f \in E$. Justifier proprement que $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi(f)'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A.3 Montrer que si f est bornée alors $\varphi(f)$ l'est aussi.

A.4 On suppose dans cette question que $f(x)$ converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$ fixé quand $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

(a) Montrer proprement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant \varphi(f)(x) \leqslant \ell + \varepsilon\,.$$

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(f)(x)$.

A.5 Démontrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(f)(x) = +\infty$

Partie B : Algèbre linéaire, intégration

B.1 Démontrer que φ est un endomorphisme de E.

B.2 Montrer que φ n'est pas surjective et donner un exemple de fonction qui ne soit pas dans $\mathrm{Im}(\varphi)$.

On considère

$$F = \{\, f \in E \mid f \text{ est 1-périodique.} \} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

B.3 Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.
On admet que G est aussi un sous-espace vectoriel de E (trop facile).

B.4 (a) Soit $f \in F \cap G$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_1^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(c) En déduire que $F \cap G \subseteq \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

B.5 A l'aide de la question A.2, montrer que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \subseteq F \cap G$.

Partie C : Représentation matricielle

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$e_k \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k. \end{array}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $E_n = \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_n)$. On note φ_1 la restriction de φ à E_n. On admet que φ_1 est linéaire (en tant que restriction d'une application linéaire sur un sous-espace vectoriel).

C.1 (a) Donner sans justification un espace vectoriel usuel auquel E_n est isomorphe.

(b) En déduire sa dimension.

(c) En déduire que $\mathscr{B}_1 = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E_n.

C.2 Soit $j \in \mathbb{N}$.

(a) Vérifier que $\varphi_1(e_j)$ est une fonction polynomiale. On note P_j le polynôme associé.

(b) Montrer que

$$P_j = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} \binom{j+1}{i} X^i.$$

(c) En déduire la décomposition de $\varphi_1(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_1$.

C.3 Déduire de la question précédente que φ_1 est un endomorphisme de E_n.

C.4 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1)$. Que vaut $a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2$?
Attention, le fait que $\mathscr{B}_1$ est numérotée à partir de 0 décale tous les indices...

C.5 (a) Justifier que A est triangulaire et que pour tout $i \in [\![1; n+1]\!]$, $a_{i,i} = 1$.

(b) En déduire $\mathrm{rg}\,(A)$.

(c) En déduire que φ_1 est un automorphisme.

C.6 On suppose dans cette question que $n = 2$.

(a) Expliciter A.

(b) Déterminer φ_1^{-1}.

Partie D : Représentation matricielle

On définit $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2, u_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_1(x) = \mathrm{e}^x, \qquad u_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad u_3(x) = \sin(2\pi x).$$

On pose φ_2 la restriction de φ sur $H = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_2)$. On admet que φ_2 est linéaire (en tant que restriction d'une application linéaire sur un sous-espace vectoriel).

D.1 Montrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de H.

D.2 Calculer $\varphi_2(u_1)$, $\varphi_2(u_2)$ et $\varphi_2(u_3)$.

D.3 En déduire que φ_2 est un endomorphisme de H.

D.4 Calculer $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2)$.

On définit $\mathscr{B}_3 = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad v_1(x) = \mathrm{ch}\,(x), \qquad v_2(x) = \mathrm{sh}\,(x), \qquad v_3(x) = u_3\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

D.5 Vérifier que $\mathscr{B}_3$ est une famille de H et déterminer $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3)$.

D.6 Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

D.7 Justifier que $\mathscr{B}_3$ est une base de H.

D.8 Déterminer $C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi_2)$.

D.9 Quelle relation existe-t-il entre B, C, P et P^{-1} ? Le vérifier.

Partie E : Intégration, série numérique

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{1+|t|^n}. \end{aligned}$$

Dans cette partie uniquement on considère le réel x fixé dans $]1;+\infty[$ et on définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \varphi(f_n)(x).$$

E.1 Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

E.2 Calculer u_0, u_1 et u_2.

E.3 Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

E.4 En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

E.5 Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\frac{1}{1+(x+1)^n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$$

E.6 En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

E.7 Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.