Devoir Maison 14
D'après Banque PT 2016 (sujet A)

A faire pour le Mardi 11/06

Exercice I (Variables Aléatoires)

Pour lutter contre son alcoolisme et boire un nombre limité de verres, le capitaine Haddock adopte sans équivoque le protocole ad hoc dont la doc est donnée accolée ci-dessous.

On considère une pièce ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de tomber sur pile. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. On note alors N le rang d'apparition de ce premier pile. Dans un second temps on lance N fois la pièce et l'on note X le nombre de piles obtenus, ce nombre X correspondra alors au nombre de verres que s'autorise le capitaine. On suppose que chaque lancer de pièce est indépendant des lancers précédents.

Dans ce sujet, on pourra selon les besoins étendre toutes les formules du cours à des sommes infinies, tout en continuant à bien justifier quelle formule est utilisée.

I.1 (a) Quel est l'univers image de N ? Pourquoi sommes-nous en dehors du cadre du cours ?

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Ecrire proprement $(N = k)$ comme l'intersection de k évènements indépendants.

(c) En déduire $\mathbb{P}(N = k)$.

(d) Montrer que $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(N = k)$ est une série convergente et calculer sa somme totale.

(e) A quel évènement, en fonction de N, correspond la somme partielle d'ordre $n \geqslant 1$ de cette série ?

(f) Montrer que
$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{p}.$$

On étendra la définition du cours à une somme infinie en justifiant au préalable la convergence de la somme.

I.2 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $N = n$?

(b) Déterminer la loi conjointe de (N, X).

I.3 (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1;1]$.

i. Montrer que pour tout $n \geqslant k$, on a
$$0 \leqslant \binom{n+k}{k} |x|^n \leqslant \frac{2^k}{k!} n^k |x|^n.$$

ii. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n+k}{k} x^n$.

(b) Soit $f :]-1;1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]-1;1]$ par $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

i. Déterminer la dérivée k-ième de f.

ii. Montrer que
$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

*On admettra que **dans ce cas particulier** la dérivée d'une somme totale est la somme totale des dérivées.*

I.4 En déduire que la loi de X est donnée par
$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1-p}{2-p}.$$

On pensera à préciser toute utilisation de systèmes complets d'évènements incompatibles.

Définition I.1

Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dénombrable et V une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que V suit une loi géométrique de paramètre λ, noté $V \hookrightarrow \mathscr{G}(\lambda)$ si et seulement si

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(V = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

I.5 Soient U une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre λ. On suppose U et V indépendantes et on pose enfin $Y = UV$.

(a) Sans calculer la loi de Y, déterminer l'espérance de Y.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$.
On pensera à distinguer le cas où $k = 0$.

(c) On admet que $\mathbb{V}(V) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2}$. En déduire la variance de Y.

I.6 En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant une loi de Bernoulli et l'autre une loi géométrique de même paramètre.

I.7 En déduire que même si le capitaine Haddock truque la pièce, il ne boira en moyenne qu'un seul verre.

I.8 *Facultative.* Déterminer une valeur de p que doit prendre Tintin pour que la probabilité que le capitaine Haddock boive plus de trois verres soit inférieure à $0,1$.