Révisions Juin
Banque PT 2017 - Sujet C

Les questions en bleu ont été ajoutées au sujet initial de 2017 et les questions en rouge nécessitent des prérequis de deuxième année et doivent donc être admises.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Préambule

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, dont la dérivée f' est strictement croissante. x_0 désigne un réel de I.

1. Rappeler le théorème des accroissements finis.
2. En déduire, pour tout réel x de I distinct de x_0, l'existence d'un réel c_{x,x_0} de I tel que :
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_{x,x_0}).$$
3. On se place, dans cette question, dans le cas où $x < x_0$. Montrer que
$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) > 0.$$
4. On se place, dans cette question, dans le cas où $x > x_0$. Montrer que
$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) > 0.$$
5. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0.
6. Que peut-on déduire des résultats précédents pour la représentation graphique de la fonction f ?

Partie I

Définition I.1

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue sur $[a;b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\displaystyle\lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale est convergente et on note alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque :

- On appelle une telle intégrale, une intégrale impropre ou généralisée.
- Il est possible également d'étendre la notion lorsque a ET b se trouvent aux bornes de l'ensemble de continuité de f : si f est continue sur $]a;b[$ avec $(a,b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}} \int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int_c \beta f(t)\,\mathrm{d}t,$$
où c est un réel quelconque appartenant à $]a;b[$.

I. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$. On suppose que

(i) $\forall t \in [a;b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$.

(ii) l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On pose pour tout $x \in [a;b[$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que F et G sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ et croissantes sur $[a;b[$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [a;b[$,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On a donc démontré le résultat suivant :

Théorème I.2 de comparaison pour les intégrales

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$ telles que

(i) $\forall t \in [a;b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$,

(ii) l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge,

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et de plus $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

II. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n^2}$.

III. Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On rappelle que l'intégrale de Gauss, qui est une intégrale convergente, donnée par $I_{\mathcal{G}} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ a pour valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

IV. Soit $x \geqslant 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{e}^{-n^2} n^x$.

V. Soit $x \geqslant 0$. Justifier que la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^x$ est prolongeable par continuité en 0.

Soit G la fonction qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^x\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'intégrale $G(x)$ est convergente.
2. Que vaut $G(0)$?
3. Que vaut $G\left(\frac{1}{2}\right)$?
4. (a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0;A]$:

$$\left|\mathrm{e}^{-t}\, t^x\right| \leqslant \left(1 + t^A\right) \mathrm{e}^{-t}.$$

   (b) **(Admis)** Montrer que G est continue sur $[0;A]$.

   (c) **(Admis)** Montrer que G est de classe C^∞ sur $[0;A]$.

   (d) **(Admis)** En déduire que G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer, pour tout entier naturel n et tout réel $x \geqslant 0$, $G^{(n)}(x)$ **sous forme d'intégrale**.

Pour tout réel t strictement positif, on pose $g_t : x \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^x$.

VI. Soit $t > 0$. Montrer que g_t est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer, pour tout entier naturel n et tout réel $x \geqslant 0$, $g_t^{(n)}(x)$.

On admettra dans la suite que tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} g_t^{(n)}(x)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$: $G(x+1) = (x+1)G(x)$.
6. Calculer, pour tout entier naturel n : $G(n)$.
7. Pour tout $x > -1$, on pose $\tilde{G}(x) = \frac{G(x+1)}{x+1}$. Montrer que $\tilde{G}$ prolonge G à l'intervalle $]-1;+\infty[$, et que ce prolongement est de classe C^∞ sur cet intervalle.
8. Montrer qu'au voisinage de -1^+, $\tilde{G(x)} \sim \frac{1}{x+1}$.
9. Exprimer, pour tout réel $x > -1$, $\tilde{G}''(x)$ à l'aide de xn $G(x+1)$, $G'(x+1)$ et $G''(x+1)$. En déduire une expression de $(x+1)^3\tilde{G}(x)$ sous la forme d'une seule intégrale.
10. Etudier le signe du trinôme du second degré $X^2 - 2X + 2$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\tilde{G}''(x) > 0$ pour tout $x > -1$.
11. En s'appuyant sur le préambule, que peut-on en déduire concernant le graphe $\Gamma_{\tilde{G}}$ de $\tilde{G}$?
12. En comparant $\tilde{G}(0)$ et $\tilde{G}(1)$, montrer l'existence d'un réel c de l'intervalle ouvert $]0;1[$ tel que la courbe représentative de la fonction $\tilde{G}$ admette, au point d'abscisse c, une tangente horizontale.
13. En déduire le signe de $\tilde{G}'$, et dresser le tableau de variations de $\tilde{G}$ sur $]-1;+\infty[$ (on précisera la valeur de $\lim\limits_{x\to -1^+} \tilde{G}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{G}(x)$).
14. Tracer l'allure de $\Gamma_{\tilde{G}}$ de la fonction $\tilde{G}$ sur la feuille de papier millimétré fournie.

    On donne : $c \simeq 0,46$ et $\tilde{G}(c) \simeq 0,89$.

Partie II

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

VII. Déterminer la parité de F.

Définition I.3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **développable en série entière** sur I si et seulement s'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

1. pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge,
2. pour tout $x \in I$, la somme totale de cette série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ vaut $f(x)$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

VIII. A l'aide du théorème de Taylor-reste intégral, montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

IX. En déduire que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est aussi développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2. **(Admis)** En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2xy(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$

X. Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ son développement en série entière sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{a_{n+1}(x+1)^{n+1}}\right|$.

(b) En déduire la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\,a_{n+1}x^n$.

Proposition I.4 (Admise)

Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On note $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ son développement en série entière. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est également développable en série entière et de plus

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n.$$

XI. Soient $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f admet un développement à l'ordre p, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et déterminer ce développement limité.

XII. Soient $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=b_n$.

4. En cherchant le développement en série entière de F sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n\geqslant 0$.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire le développement en série entière de F.

XIII. Soient $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que si f est impaire alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}=0$. Est-ce cohérent avec les questions VII. et 6. ?

XIV. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=\frac{(-4)^n\,4^n n!}{(2n+1)!}.$$

(a) Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|.$$

(b) En déduire qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$,

$$|u_n|\leqslant\frac{|u_0|}{2^n}.$$

7. Etudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-4)^n\,4^n n!}{(2n+1)!}.$$

8. **(Admis)** Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

puis en déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}=\frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$