

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Globalement, les candidats ont réussi à répondre à un nombre important de questions. La notion d'intégrale à paramètre semble bien comprise.

Le sujet faisait appel à des connaissances de première année (théorème des accroissements finis) : celles-ci semblent oubliées d'une grande partie des candidats, ce qui est regrettable.

L'orthographe laisse toujours à désirer, avec pourtant des mots utilisés fréquemment en mathématiques (nous avons trouvé : « interval », « une intégral »...). Le nom de Rolle a été régulièrement écorché : « Rholle », « Rhôle », etc...

Les copies sont, dans la majorité, bien présentées. Le jury a noté un effort de rédaction en ce qui concerne des points a priori délicats.

Nous souhaitons aussi faire quelques rappels de bon sens :

- i.* Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve (comme nous l'avons fréquemment trouvé à la troisième question de la partie II : il ne suffit pas de recopier l'équation différentielle). Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.
- ii.* Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Par exemple, lors du calcul de $G(x+1) = (x+1)G(x)$, ou encore pour prouver que \tilde{G} prolonge G .
- iii.* On peut rappeler l'importance de lire l'énoncé et l'enchaînement des questions : déterminer la convergence d'une série n'est pas la même chose que déterminer le développement en série entière d'une fonction.
- iv.* Les abréviations ne sont pas acceptables dans les copies : il faut faire l'effort d'écrire les noms des théorèmes en entier, et non, comme nous l'avons trouvé : « TAF », « TFCI », « IPP ».

Remarques particulières

Préambule

1. Une proportion non négligeable de candidats ne connaît pas le théorème des accroissements finis, ou alors, imparfaitement : il manque souvent des hypothèses essentielles, comme le caractère dérivable de la fonction considérée.

Ou encore, dans l'égalité $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, beaucoup de candidats prennent c quelconque dans le domaine de dérivabilité de la fonction f , indépendant donc de a et b , ce qui sous-entend qu'ils n'ont aucune interprétation géométrique de ce théorème.

Beaucoup donnent, comme réponse, la définition du nombre dérivé d'une fonction. Nous avons aussi trouvé des confusions avec le théorème de Rolle.

Enfin, nous avons aussi trouvé un certain nombre de copies où les candidats semblent ne pas connaître la signification des quantificateurs, « quelque soit » est confondu avec « il existe », et vice-versa.

2. Cette question a été traitée par les candidats ayant correctement répondu à la précédente, même si, souvent, ceux qui ont bien écrit dans la question précédente que c devait être dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ ne précisent pas toujours que c_{x, x_0} doit être dans $]x, x_0[$, et se contentent d'affirmer qu'il appartient au domaine de dérivabilité I de la fonction.

Dans les autres copies, cette question, comme la suivante, est souvent traitée de façon très approximative, sans utiliser les résultats des questions précédentes, en prenant, par exemple : $c_{x, x_0} = x_0$.

3. La majorité des candidats ayant répondu aux deux questions précédentes a traité correctement celle-ci. Toutefois, un certain nombre de candidats n'ayant pas fait attention à l'hypothèse $x < x_0$ supputent une erreur d'énoncé.

D'autres confondent la croissance de la fonction avec celle de sa dérivée.

Certains candidats partent du résultat, et essayent de raisonner par équivalence.

4. Cette question a été traitée par les candidats ayant correctement répondu aux deux premières questions.

Nous insistons sur le fait que le résultat étant donné dans la question, il est attendu dans la justification de préciser que l'inégalité change de sens car $x - x_0 < 0$.

5. Un nombre non négligeable de candidats ne semble pas connaître le résultat. Nous rappelons que l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées s'écrit sous la forme :

$$y = ax + b \quad , \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

et non :

$$ax + b$$

ou encore :

$$T(x) = ax + b$$

Nous avons trouvé, par ailleurs, pas mal de réponses fantaisistes et aberrantes : « $f(x) = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$ », « $(x - x_0) f'(x_0) + f(x_0) = 0$ », « $f'(x_0) = 0$ », etc ...

6. La majorité des candidats a compris que la courbe représentative de la fonction était située au-dessus de la tangente au point d'abscisse x_0 . Tous les candidats n'ont pas remarqué que cela restait vrai pour toutes les tangentes.

Nous rappelons qu'il faut bien distinguer la courbe représentative d'une fonction, ou son graphe, et la fonction. De nombreux candidats ont répondu que « f était au-dessus de sa tangente en x_0 ». Là encore, des candidats donnent des réponses fantaisistes : « la courbe est une parabole », « la courbe est positive », « la courbe est croissante ».

Partie I

1. La majorité des candidats a montré, pour tout réel $x \geq 0$, l'intégrale $G(x)$ était convergente. Pour les autres, nous rappelons qu'écrire que, lorsque t tend vers l'infini, $t^x e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ne suffit pas, il faut préciser que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Nous rappelons aussi que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ diverge.

Certains candidats pensent encore que le fait que la limite de l'intégrande soit nulle en l'infini suffit pour obtenir la convergence. D'autres donnent des équivalences entre $e^{-t} t^x$ et e^{-t} , ou affirment que, lorsque t tend vers l'infini, $e^{-t} t^x$ est négligeable devant e^{-t^2} . D'autres encore écrivent que l'intégrale est « faussement impropre en l'infini ».

2. La majorité des candidats a donné la valeur de $G(0)$. Un calcul était attendu pour cette question, en donnant une primitive de $t \mapsto e^{-t}$.
3. Tous les candidats n'ont pas réussi à déterminer la valeur de $G\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour ceux qui l'ont fait, le jury a apprécié la rigueur dans le maniement de l'intégration par parties. Un certain nombre de candidats ont obtenu des résultats aberrants, sans que cela ne semble les déranger : une valeur négative, ou, encore, zéro. Le jury comprend que l'on se trompe, mais apprécie les candidats qui font preuve de recul par rapports aux résultats qu'ils obtiennent, même s'ils n'arrivent pas à la solution.
4. (a) Très peu de candidats ont compris qu'il fallait distinguer les cas $0 \leq t \leq 1$ et $t > 1$. Beaucoup se contentent de recopier le résultat attendu, sans aucune justification.

- (b) La majorité des candidats connaît le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Toutefois, certains donnent des réponses incomplètes : donner une hypothèse de domination par une fonction donnée, sans préciser que celle-ci est intégrable sur $[0, +\infty[$, ne suffit pas.

D'autre part, trop peu de candidats ont justifié la convergence de $\int_1^{+\infty} (1+t^A)e^{-t} dt$. Certains ne font pas appel à la question précédente, et utilisent une majoration par $t^A e^{-t}$.

- (c) Pour cette question, plus délicate, les candidats pensent en général à calculer la dérivée de l'intégrande par rapport à la variable x , et procèdent ensuite par récurrence, ce qui a été apprécié par le jury. L'hypothèse de domination n'est pas souvent vérifiée correctement : les candidats oublient les valeurs absolues, ne pensent pas à vérifier l'intégrabilité en zéro. Nous rappelons aussi que, pour $0 < t \leq A$, il n'est pas possible de majorer le logarithme népérien de t par celui de A , ni par t , ni par A , comme nous l'avons trouvé fréquemment. Seuls quelques très rares candidats ont prouvé la majoration et la convergence de $\int_0^{+\infty} (1+t^A)e^{-t} \ln t dt$.

Une proportion non négligeable de candidats ne sait pas dériver l'intégrande par rapport à x . Nous avons trouvé beaucoup de réponses fausses, voire fantaisistes (avec des coefficients en « $x!$ »).

D'autres candidats se contentent d'affirmations où le calcul explicite des dérivées n'apparaît jamais.

- (d) Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats, et s'est donc révélée classante. En particulier, conclure au caractère C^∞ sur \mathbb{R}^+ de la fonction sachant qu'elle est C^∞ sur tout intervalle de la forme $[0, A]$ nécessite un minimum de justifications, qui n'ont pas souvent été données. Un nombre important de candidats n'hésitent pas à dire qu'il suffit de faire tendre A vers l'infini, trop peu emploient le terme « quelque soit A », ou « pour tout A », pour justifier leur réponse. Un minimum de justification est nécessaire, par exemple : $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{A \in \mathbb{R}_+} [0, A]$, ce qui a été vu dans de bonnes copies.

5. La majorité des candidats a bien montré, à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$G(x+1) = (x+1)G(x)$$

Par contre, nous avons, dans de nombreuses copies, remarqué l'absence d'égalités entre les différentes relations requises pour arriver au résultat. Les candidats vérifient les hypothèses du théorème, écrivent leurs crochets, mais il n'y a nulle part de signe « = », ce qui est quand même problématique pour suivre le calcul.

6. La majorité des candidats a obtenu, pour tout entier naturel n : $G(n) = n!$, en faisant une démonstration par récurrence.

Certains candidats pensent voir une suite géométrique de raison $n + 1 \dots$. D'autres refont le calcul précédent, sans se poser de questions, et concluent que :
 $\ll G(n) = (n - 1) G(n - 1) \gg$.

7. Peu de candidats ont compris ce qu'était un prolongement. Beaucoup se contentent de calculer les limites à droite et à gauche en zéro de \tilde{G} . Nous avons aussi trouvé quelques $\ll G(x) = \tilde{G}(x) \gg$ sur $] - 1, 0]$, alors que G n'est pas défini sur cet intervalle.

Par contre, la majorité des candidats a réussi à montrer que le prolongement était de classe C^∞ sur $] - 1, +\infty[$.

8. La majorité des candidats a bien montré qu'au voisinage de -1^+ , $\tilde{G}(x) \sim \frac{1}{x + 1}$. Nous avons quand même trouvé sur un nombre non négligeable de copies :

$\ll \lim_{x \rightarrow -1} \frac{G(x + 1)}{x + 1} = \frac{1}{x + 1} \gg$, ce qui montre que les candidats n'ont pas bien compris ce qu'est une limite.

Certains candidats n'ont pas bien mis les parenthèses dans les calculs :
 $(x + 1) G(x) \neq x + 1 G(x)$.

De nombreux candidats prennent l'intégrale de l'équivalent. Peu ont justifié clairement que c'était la continuité de la fonction G en zéro qui conduisait à :

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = G(0).$$

9. La majorité des candidats a réussi à donner, pour tout réel $x > -1$, l'expression de $\tilde{G}'''(x)$ en fonction de x , $G(x + 1)$, $G'(x + 1)$ et $G''(x + 1)$. Par contre, l'expression sous forme intégrale n'est pas souvent donnée correctement.

Nous rappelons que ce n'est pas au correcteur de finir et de simplifier les calculs. Certains candidats semblent ne pas voir que $-G'(x + 1) - G'(x + 1) = -2G'(x + 1)$, ou encore que $\frac{2x + 2}{x + 1} = 2 \dots$

Quelques erreurs de signes se glissent dans les calculs, erreurs pourtant facilement identifiables lorsqu'on compare avec le polynôme de la question suivante.

10. La majorité des candidats a donné le signe du trinôme du second degré $X^2 - 2X + 2$ sur \mathbb{R} . Certains sont passés par une étude de fonctions. D'autres ont utilisé la forme canonique.

Beaucoup de candidats oublient de conclure ...

De trop nombreux candidats pensent qu'il suffit que le discriminant soit strictement négatif pour que le polynôme soit positif, sans penser qu'il pourrait être négatif.

Un nombre non négligeable de candidats calcule le discriminant, donne les deux racines complexes, et fait un tableau de signes en expliquant que le trinôme est positif à l'extérieur des racines, et négatif ailleurs. D'autres donnent des intervalles de \mathbb{R} dont les bornes sont des nombres complexes.

Peu de candidats ont réussi à obtenir la stricte positivité de $\tilde{G}'''(x) > 0$ pour tout

réel $x > -1$. Beaucoup de candidats écrivent qu'ils « obtiennent le signe de \tilde{G}''' par analogie avec le polynôme du second degré », ce qui ne veut rien dire.

11. La majorité des candidats ayant correctement répondu à la dernière question du préambule a donné la réponse correcte.

Toutefois, parmi les quelques candidats qui ont traité cette question, certains ont oublié de dire que la fonction \tilde{G} vérifiait les hypothèses du préambule, en particulier, que c'était une fonction croissante.

12. La majorité des candidats trouve bien l'égalité entre $\tilde{G}(0)$ et $\tilde{G}(1)$. Par contre, peu utilisent le théorème de Rolle, beaucoup passent par le théorème des accroissements finis (ce qui est correct). Lorsque le théorème de Rolle est mentionné, les hypothèses de celui-ci ne sont pas toujours vérifiées.

Certains candidats utilisent à tort le théorème des valeurs intermédiaires. Enfin, quelques candidats disent que « la fonction n'est pas constante, et donc admet un extremum », puis concluent, ce qui est en fait l'idée de la démonstration du théorème de Rolle : dans ce cas, autant citer le théorème.

Enfin, sur de nombreuses copies, les candidats passent du temps à calculer $\tilde{G}(0)$ et $\tilde{G}(1)$ (à partir de leur intégrale de définition) sans tenir compte des résultats précédemment obtenus.

De nombreux candidats ont affirmé, sans calcul, que $\tilde{G}(0) = \tilde{G}(1)$.

13. Le signe de \tilde{G}' n'est pas toujours donné de façon explicite, comme demandé. De même, beaucoup de candidats donnent les valeurs des limites à droite en -1 et en l'infini, sans justification. Très peu de candidats ont justifié clairement la limite en l'infini : \tilde{G} y admet une limite car elle est croissante, et la relation $\tilde{G}(n) = n!$, pour tout entier naturel n , permet de déterminer la valeur de cette limite. De très rares candidats justifient le résultat attendu en comparant avec la tangente en 1 et la convexité de la fonction.

Les copies qui ont pris le soin de justifier les valeurs des limites ont été valorisées.

14. L'allure du graphe $\Gamma_{\tilde{G}}$ de la fonction \tilde{G} n'est pas toujours donnée. Souvent, l'asymptote verticale $x = -1$ n'apparaît pas, on trouve une branche infinie au voisinage de valeurs bien plus petites que -1 . L'échelle choisie est souvent mal appropriée, et ne permet pas de voir les caractéristiques particulières du graphe. Nous avons également trouvé des courbes qui présentent un point anguleux en c .

Partie II

1. Environ la moitié des candidats justifie correctement le caractère dérivable de la fonction F . Certains se contentent d'écrire que la fonction F est dérivable, mais ne justifient rien. D'autres disent qu'« une intégrale est toujours dérivable ».

Il est clair qu'écrire que « F est dérivable comme produit de fonctions qui le sont » n'est pas suffisant : on demande une justification. Quelques candidats pensent encore que, si H désigne une fonction dérivable, la dérivée de la fonction $x \mapsto H(x) - H(0)$ est la fonction $x \mapsto H'(x) - H'(0)$, ou encore, si h désigne cette fois une fonction, que la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_0^x h(t) dt$ est la fonction $x \mapsto \int_0^x h'(t) dt$, ce qui revient au même et est bien sûr faux.

Certains candidats ont pensé avoir trouvé une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ sans même vérifier en redérivant.

Le jury a apprécié les candidats qui reconnaissaient une intégrale fonction de sa borne supérieure, ou faisaient appel au théorème fondamental de l'analyse, en expliquant que la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ était l'unique primitive s'annulant en zéro de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.

2. La majorité des candidats sait que la fonction exponentielle est développable en série entière sur \mathbb{R} . Par contre, peu citent le théorème d'intégration terme à terme. En ce qui concerne le produit de Cauchy, la valeur du rayon de convergence n'est pas toujours donnée.

De nombreux candidats pensent qu'une fonction de classe C^∞ (sur un domaine qui n'est en plus pas précisé) admet un développement en série entière, en utilisant la formule de Taylor-Young, et en oubliant que cette formule donne un résultat local.

Cette question s'est donc révélée très classante.

3. La majorité des candidats a bien montré que la fonction F était solution, sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2xy(x) + 1 \quad (\mathcal{E})$$

Pour le reste, nous insistons sur le fait qu'il ne suffisait pas de recopier la formule pour la prouver. Il fallait faire apparaître d'une façon ou d'une autre l'égalité entre la valeur de la dérivée de l'intégrale fonction de sa borne supérieure en $x \in \mathbb{R}$, et e^{x^2} .

4. La majorité des candidats a obtenu la relation de récurrence vérifiée par les a_n , $n \geq 0$.
5. Tous les candidats n'ont pas fait attention au fait que a_0 était nul. Certains l'affirment, mais ne donnent aucune justification. Notons que la question précédente ne donne aucune informations sur la valeur de a_0 , seul le calcul de $F(0)$ permet de conclure. Sinon, si une grande proportion de candidats obtient l'expression de a_{2p+1}

en fonction de p , le calcul est souvent trop succinct, sans réelle indication que l'on a multiplié au numérateur et au dénominateur par les termes pairs.

6. Les candidats ayant répondu correctement à la question précédente donnent le développement en série entière de F . Toutefois, certains candidats qui avaient pourtant bien calculé les coefficients à la question précédente, écrivent le développement en série entière de F comme une somme de termes en x^n . Certains (heureusement rares) candidats pensent que $F(x) = \sin(2x)$, ou, encore, $2 \sin(x)$, mais ne vérifient pas qu'il y a alors un problème avec l'équation différentielle.
7. La majorité des candidats a étudié correctement la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

Certains candidats écrivent des égalités entre une valeur absolue, et une expression faisant intervenir des $(-1)^n$. D'autres oublient la valeur absolue, ne justifient pas clairement la limite en prenant un équivalent, ou ne précisent pas que convergence absolue implique convergence. D'autres encore s'intéressent à la série entière $\sum \frac{(-1)^n 4^n n! x^n}{(2n+1)!}$, mais n'obtiennent pas souvent le résultat correct.

Parfois, lorsque le critère de d'Alembert est vérifié, la conclusion est « u_n converge », au lieu de « $\sum u_n$ converge ». Si c'est manifestement une erreur d'inattention, il n'y a pas de problème, mais, parfois le candidat l'écrit plusieurs fois, ce qui est problématique.

Certains candidats ont, très justement, fait remarquer que cela résultait directement des questions précédentes.

Un nombre très important de candidats calcule le rayon de convergence de la série entière, et non pas la convergence de la série : ils ne répondent donc pas à la question posée. Rappelons que dans ce cas, considérer $F(1)$ permettrait de conclure.

8. Peu de candidats ont répondu correctement à cette question. Pour le début, un certain nombre de candidats échangent Σ et \int , mais sans aucune justification.

Alors que le premier développement en série entière est bien trouvé par les candidats ayant traité la question malgré, parfois, une confusion entre les variables x et t , seuls quelques rares candidats effectuent correctement le produit de Cauchy. Encore une fois, le résultat étant donné dans l'énoncé, il convient d'être précis dans les justifications.