Corrigé du Devoir Maison 1

Solution de l'exercice I

I.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n soit vraie, c'est-à-dire que 3 divise $4^n + 1$. Par définition, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k$. Donc $4^n = 3k - 1$ et par conséquent,

$$4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1 = 4 \times (3k-1) + 1 = 12k - 4 + 1 = 12k - 3 = 3(4k-1).$$

Puisque $k' = 4k - 1 \in \mathbb{Z}$, on en déduit que 3 divise $4^{n+1} + 1$. Donc P_{n+1} est vraie. En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (P_n \Rightarrow P_{n+1}).}$$

I.2 On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, Q_n est vraie.

- *Initialisation :* si $n = 0$, alors $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$. Donc 3 divise $4^0 - 1$ et par conséquent Q_0 est vraie.
- *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que Q_n soit vraie, c'est-à-dire que 3 divise $4^n - 1$. De même que dans la question précédente, on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n - 1 = 3k$ ou encore $4^n = 3k + 1$. Donc

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times (3k+1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1).$$

  Le nombre $4k+1$ est entier, $4k+1 \in \mathbb{Z}$, donc 3 divise $4^{n+1} - 1$ et Q_{n+1} est vraie. On vient donc de montrer que $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ et ceci pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Q_n \Rightarrow Q_{n+1})$
- *Conclusion :* On a montrer que Q_0 est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Q_n \Rightarrow Q_{n+1})$. Donc, par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Q_n \text{ est vraie.}}$$

I.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons Q_n vraie, alors 3 divise $4^n - 1$ et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n - 1 = 3k$ ou encore $4^n = 3k + 1$. Par conséquent,

$$4^n + 1 = 3k + 2.$$

Supposons que P_n soit vraie alors il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k' + 1$, ce qui conjointement avec l'égalité précédente, implique que $3k + 2 = 3k' + 1$. Par conséquent, $1 = 3(k' - k)$, c'est-à-dire 3 divise 1, ce qui est absurde. Donc P_n est fausse et donc *non* (P_n) est vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (Q_n \Rightarrow \textit{non}\,(P_n)).}$$

I.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question I.2, on sait que Q_n est vraie. Or d'après la question I.3, on sait également que $Q_n \Rightarrow \textit{non}\,(P_n)$. Donc on en déduit que *non* (P_n) est vraie. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \textit{non}\,(P_n) \text{ est vraie.}$$

Donc la négation de cette phrase est fausse c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{l'assertion } (\exists n \in \mathbb{N},\ P_n) \text{ est fausse.}}$$

Solution de l'exercice II

II.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 1 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3x^2+1} > 0$, on en déduit que la fonction $u : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite, la fonction $\varphi = \exp \circ u$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$), est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{6x}{(3x^2+1)^{3/2}} = \frac{3x}{(3x^2+1)^{3/2}}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = \frac{3x}{(3x^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}}.$$

Pour dériver une seconde fois, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{3x}{(3x^2+1)^{3/2}} \times \varphi(x)$. On sait que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$ n'est jamais nulle et est également dérivable. Donc $v : x \mapsto \frac{3x}{(3x^2+1)^{3/2}} = \frac{3x}{\left(\sqrt{3x^2+1}\right)^3}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction φ' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc φ est dérivable deux fois. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi''(x) = v'(x)\varphi(x) + v(x)\varphi'(x).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v'(x) = \frac{3 \times \left(3x^2+1\right)^{3/2} - 3x \times \frac{3}{2} \times (6x) \times \sqrt{3x^2+1}}{\left(3x^2+1\right)^3}.$$

On remarque que l'on peut factoriser le numérateur par $3\sqrt{3x^2+1}$. En conséquence, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v'(x) = \frac{3\sqrt{3x^2+1}\left(3x^2+1 - x \times \frac{3}{2} \times (6x)\right)}{\left(3x^2+1\right)^3} = \frac{3\left(3x^2+1-9x^2\right)}{\left(3x^2+1\right)^{3-\frac{1}{2}}} = \frac{3\left(1-6x^2\right)}{\left(3x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{3\left(1-6x^2\right)}{\left(3x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}} + \frac{3x}{(3x^2+1)^{3/2}}\,\frac{3x}{(3x^2+1)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}} \\ &= \left[\sqrt{3x^2+1}\left(1-6x^2\right) + 3x^2\right] \frac{3}{\left(3x^2+1\right)^3}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}}.\end{aligned}$$

Et nous sommes contents de ne pas à avoir à calculer la dérivée troisième...

En conclusion, la fonction φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi''(x) = \left[\sqrt{3x^2+1}\left(1-6x^2\right) + 3x^2\right] \frac{3}{\left(3x^2+1\right)^3}\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}}.$$

II.2 Soient a, b, c trois réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Analyse. Supposons que $f \in \mathscr{S}_0$. Alors f est deux fois dérivable et $f'' = -f$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2ax + b$$

et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = 2a.$$

Ainsi l'équation $f'' = -f$ implique dans ce cas que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-\left(ax^2+bx+c\right) = 2a \qquad \Leftrightarrow \qquad ax^2+bx+c = -2a.$$

Il est interdit de conclure directement, sans justification, que $a^2 = b = 0$ et que $c = -2a$. Ce n'est pas encore un résultat de cours, il nous faut donc le démontrer. Puisque l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit notamment qu'elle est vraie en 0, 1 et -1 par exemple. Donc

$$\begin{cases} a \times 0 + b \times 0 + c = c = -2a \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c = -2a \\ a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a \\ 3a + b + c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a \\ 3a + b - 2a = 0 \\ 3a - b - 2a = 0 \end{cases}.$$

Notre système est donc équivalent à

$$\begin{cases} c = 2a \\ b = -a \\ a + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ b = -a \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc l'unique solution candidate est la fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \times x^2 + 0x + 0 = 0$, c'est-à-dire la fonction nulle.
Synthèse. Il est clair que si f est la fonction nulle alors f est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f'(x) = f(x) = 0 = -f(x)$. Donc $f \in \mathscr{S}_0$.

Conclusion. Soient a, b et c trois réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$f \in \mathscr{S}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = 0.$$

II.3 Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathscr{S}_0$ et λ et μ deux réels. Puisque f_1 et f_2 sont deux fonctions dans $\mathscr{S}_0$, on sait par hypothèse qu'elles sont deux fois dérivables. La fonction $\lambda f_1 + \mu f_2$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $(\lambda f_1 + \mu f_2)' = \lambda f_1' + \mu f_2'$. Puisque f_1 et f_2 sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, on sait que f_1' et f_2' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc $(\lambda f_1 + \mu f_2)'$ est aussi dérivable comme somme de fonctions dérivables. Par conséquent la fonction $\lambda f_1 + \mu f_2$ est deux fois dérivable et $(\lambda f_1 + \mu f_2)'' = (\lambda f_1' + \mu f_2')' = \lambda f_1'' + \mu f_2''$. Or f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathscr{S}_0$, donc $f_1'' = -f_1$ et $f_2'' = -f_2$. Ainsi,

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)'' = \lambda f_1'' + \mu f_2'' = \lambda(-f_1) + \mu(-f_2) = -(\lambda f_1 + \mu f_2).$$

La fonction $\lambda f_1 + \mu f_2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)'' = -(\lambda f_1 + \mu f_2).$$

Donc

$$\lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathscr{S}_0.$$

II.4 La fonction cosinus est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$. La fonction sinus étant elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction cosinus est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos'' = (-\sin)' = -\sin' = -\cos$. De plus, on sait que $\cos(0) = 1$ et que $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\cos \in \mathscr{S}.}$$

II.5 Soient $f_1 \in \mathscr{S}$, $f_2 \in \mathscr{S}$ et $t \in [0;1]$. Puisque $\mathscr{S}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{S}_0$, on en déduit que $f_1 \in \mathscr{S}_0$ et que $f_2 \in \mathscr{S}_0$. Donc d'après la question II.3, en prenant $\lambda = t \in \mathbb{R}$ et $\mu = 1-t \in \mathbb{R}$, on obtient que $tf_1 + (1-t)f_2 \in \mathscr{S}_0$, en particulier la fonction $tf_1 + (1-t)f_2$ est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(tf_1 + (1-t)f_2)''(x) = -(tf_1 + (1-t)f_2)(x).$$

En conséquence, pour montrer que $tf_1 + (1-t)f_2$ est dans $\mathscr{S}$, il ne nous reste plus qu'à vérifier les valeurs en 0 de la fonction et de sa dérivée. Comme $(f_1, f_2) \in \mathscr{S}^2$, on sait que $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Donc $(tf_1 + (1-t)f_2)(0) = tf_1(0) + (1-t)f_2(0) = t \times 1 + (1-t) \times 1 = t + 1 - t = 1$. De plus on sait également que $f_1'(0) = f_2'(0) = 0$. On en déduit donc que $(tf_1 + (1-t)f_2)'(0) = tf_1'(0) + (1-t)f_2'(0) = t \times 0 + (1-t) \times 0 = 0$. Conclusion,

$$\boxed{tf_1 + (1-t)f_2 \in \mathscr{S}.}$$

II.6 La fonction f est dans $\mathscr{S}$ et est donc deux fois dérivable. Donc la fonction $g = f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = (f')' = f''$. Or $f \in \mathscr{S}$, donc $g' = f'' = -f$. La fonction f est dérivable donc la fonction g' est aussi dérivable. Ainsi la fonction g est deux fois et $g'' = -f' = -g$. Finalement, on a bien vérifié que

$$\boxed{g \in \mathscr{S}_0.}$$

II.7 Posons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (nous avons déjà vu que f et g sont toutes deux dérivables) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 2f'(x)f(x) + 2g'(x)g(x).$$

Or par définition de g, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x)$ et nous avons vu à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f''(x) = -f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 2f'(x)f(x) + 2(-f(x))f'(x) = 0.$$

Or $\mathbb{R}$ est un intervalle donc on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = C.$$

En particulier pour $x = 0$, on a $C = h(0) = f(0)^2 + g(0)^2$. Puisque $f \in \mathscr{S}$, $f(0) = 1$ et puisque $g = f'$, on en déduit également que $g(0) = f'(0) = 1$. D'où, $C = 1^2 + 0^2 = 1$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = f^2(x) + g^2(x) = 1.}$$

II.8 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^2(x) \geqslant 0$. Donc d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 = f^2(x) + g^2(x) \geqslant f^2(x) \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

et la fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

II.9 Soit h une fonction paire et dérivable. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = h(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto h(-x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto -h'(-x)$. Par conséquent en dérivant l'égalité $h(-x) = h(x)$ (vraie sur $\mathbb{R}$) on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -h'(-x) = h'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(-x) = -h'(x).$$

La fonction h' est par conséquent impaire sur $\mathbb{R}$.

II.10 Puisque la fonction f est deux fois dérivable, on en déduit que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -f'(-x)$, puis que la fonction u' est dérivable ou encore que la fonction u est deux fois dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u''(x) = f''(-x).$$

Or $f'' \in \mathscr{S}$, donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x) = -f(-x) = -u(x)$. Donc $u \in \mathscr{S}_0$. De plus $u(0) = f(-0) = f(0) = 1$ et $u'(0) = -f'(-0) = 0$. Au bilan, on a bien montré que

$$\boxed{u \in \mathscr{S}.}$$

II.11 *Analyse.* On cherche à construire une nouvelle fonction dans $\mathscr{S}$ à l'aide de f et de u. Comme $f \in \mathscr{S}$ et $u \in \mathscr{S}$, on a vu dans la question II.5 que les fonctions $tf + (1-t)u \in \mathscr{S}$, avec $t \in [0;1]$. Cherchons $t \in [0;1]$ pour que $tf + (1-t)u$ soit paire c'est-à-dire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$tf(-x) + (1-t)u(-x) = tf(x) + (1-t)\,u(x).$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $tf(-x) + (1-t)u(-x) = tu(x) + (1-t)\,f(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad tu(x) + (1-t)\,f(x) = tf(x) + (1-t)\,u(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (t-1+t)\,u(x) + (1-t-t)\,f(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-2t)\,(f(x) - u(x)) = 0.\end{aligned}$$

Si jamais $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(x) = f(-x)$, c'est-à-dire si f est paire, n'importe quelle valeur de t convient. Mais notons que dans tous les cas, même si f n'est pas paire, la valeur de $t = \frac{1}{2}$ annule toujours le produit $(1-2t)\,(f(x) - u(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc nous allons à nous intéresser à la fonction $\frac{1}{2}f + \left(1 - \frac{1}{2}\right)u = \frac{f+u}{2}$. Remarquez que notre analyse n'est pas nécessairement exhaustive car « à partir de f et u » n'est pas une assertion mathématique rigoureuse.

Synthèse. Posons $v = \frac{f+u}{2}$. Comme $f \in \mathscr{S}$, $u \in \mathscr{S}$ (d'après la question précédente) et $t = \frac{1}{2} \in [0;1]$, on en déduit d'après la question II.5 que la fonction $v \in \mathscr{S}$. Montrons de plus que v est paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v(-x) = \frac{f(-x) + u(-x)}{2} = \frac{u(x) + f(x)}{2} = v(x).$$

La fonction $v = \frac{f+u}{2}$ est une fonction paire appartenant à l'ensemble $\mathscr{S}$.

II.12 D'après la question précédente la fonction $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ est un élément de $\mathscr{S}$. Puisque $\mathscr{S}$ ne contient qu'un seul élément, la fonction f, on en déduit que ces deux fonctions coïncident :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + f(-x) = 2f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

La fonction f est donc paire et d'après la question II.9, on en déduit que $g = f'$ est impaire.

II.13 Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x) = f(a)f(x-a) - g(a)g(x-a)$. Les fonctions f et g étant dérivables, on en déduit que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus en utilisant que $f' = g$ et que $g' = f'' = -f$, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi'(x) = f(a)f'(x-a) - g(a)g'(x-a) = f(a)g(x-a) + g(a)f(x-a).$$

De même la fonction Ψ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore la fonction Ψ est deux fois dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi''(x) = f(a)g'(x-a) + g(a)f'(x-a) = -f(a)f(x-a) + g(a)g(x-a) = -\Psi(x).$$

Ainsi on a montré que $\Psi \in \mathscr{S}_0$. Calculons maintenant $\Psi(0)$ et $\Psi'(0)$. D'une part, en utilisant la parité de f et l'imparité de g,

$$\Psi(0) = f(a)f(-a) - g(a)g(-a) = f(a)^2 + g(a)^2.$$

Donc d'après la question II.7, on en déduit que $\Psi(0) = 1$. D'autre part, toujours grâce à la parité de f et à l'imparité de g,

$$\Psi'(0) = f(a)g(-a) + g(a)f(-a) = -f(a)g(a) + g(a)f(a) = 0.$$

La fonction Ψ est donc dans $\mathscr{S} = \{f\}$. Donc $\Psi = f$ c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \Psi(x) = f(a)f(x-a) - g(a)g(x-a).}$$

II.14 Soient a et b deux réels. De la question précédente, en prenant $x = a+b$, on en déduit que

$$f(a+b) = f(a)f(a+b-a) - g(a)g(a+b-a) = f(a)f(b) - g(a)g(b).$$

De plus, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \Psi(x) = f(a)f(x-a) - g(a)g(x-a)$. En dérivant cette égalité, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f'(x) = f(a)f'(x-a) - g(a)g'(x-a) = f(a)g(x-a) + g(a)f(x-a).$$

Donc de même, en prenant $x = a+b$, on obtient également que

$$g(a+b) = f(a)g(b) + g(a)f(b).$$

En conclusion, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a)f(b) - g(a)g(b), \\ g(a+b) &= f(a)g(b) + g(a)f(b). \end{aligned}$$

II.15 On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

(a) On sait que $g' = f'' = -f$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f(x) < 0$. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En particulier

$$\boxed{\forall x > 1, \quad g(x) < g(1) < g(0) = 0.}$$

(b) La fonction $h : x \mapsto f(x) - xg(1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = f'(x) - g(1) = g(x) - g(1).$$

Donc d'après la question précédente, $\forall x > 1$, $h'(x) < 0$.

Ainsi, la fonction h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

(c) D'après la question précédente, on a pour tout $x \geqslant 1$, $h(x) \leqslant h(1)$ et donc pour tout $x \geqslant 1$,

$$f(x) \leqslant h(1) + xg(1).$$

Le réel $g(1)$ est strictement négatif et donc notamment différent de 0, le réel $\frac{-h(1)}{g(1)} \in \mathbb{R}$ existe bien.

Premier cas, $-\frac{h(1)}{g(1)} \geqslant 1$, alors on pose $\alpha = -\frac{h(1)}{g(1)}$. D'après la question II.15a, on a $g(1) < 0$, donc pour tout $x \geqslant \alpha \geqslant 1$, $xg(1) \leqslant \alpha g(1)$. Donc pour tout $x \geqslant \alpha$,

$$f(x) \leqslant h(1) + xg(1) \leqslant h(1) + \alpha g(1) = h(1) - \frac{h(1)}{g(1)}g(1) = 0.$$

Deuxième cas, $-\frac{h(1)}{g(1)} \leqslant 1$ alors on pose $\alpha = 1$. Comme $g(1) < 0$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 1 \geqslant -\frac{h(1)}{g(1)}$, $xg(1) \leqslant g(1) \leqslant -\frac{h(1)}{g(1)}g(1)$. Donc pour tout $x \geqslant \alpha = 1$,

$$f(x) \leqslant h(1) + xg(1) \leqslant h(1) - \frac{h(1)}{g(1)}g(1) = 0.$$

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, il existe } \alpha = \max\left(1; -\frac{h(1)}{g(1)}\right) \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } x \geqslant \alpha, \quad f(x) \leqslant 0.}$$

II.16 Nous avons montré dans la question précédente que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$, ce qui est contradictoire. Donc on en déduit que l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0)$ est fausse, c'est-à-dire qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) \leqslant 0$. Or f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1 > 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0; x_1]$ tel que $f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet une valeur d'annulation sur } \mathbb{R}.}$$

II.17 Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(T) = 0$. D'après la question II.7, $f(T)^2 + g(T)^2 = 1$ et donc $g(T)^2 = 1$. De plus, d'après la question II.14, on a

$$f(2T) = f(T)f(T) - g(T)g(T) = f(T)^2 - g(T)^2 \qquad \text{et} \qquad g(2T) = f(T)g(T) + g(T)f(T) = 2f(T)g(T).$$

Par conséquent,

$$\boxed{f(2T) = -1 \qquad \text{et} \qquad g(2T) = 0.}$$

II.18 De la même façon, à l'aide de la question II.14,

$$\boxed{f(4T) = f(2T)^2 - g(2T)^2 = (-1)^2 - 0^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad g(4T) = 2f(2T)g(2T) = 2 \times (-1) \times 0 = 0.}$$

II.19 Toujours par la question II.14, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 4T) = f(x)f(4T) - g(x)g(4T).$$

Donc par la question précédente,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x + 4T) = f(x) \times 1 - g(x) \times 0 = f(x), \quad \text{la fonction } f \text{ est } 4T\text{-périodique.}}$$