Les erreurs du DM1

Dans les énoncés ci-dessous, trouver l'erreur, la corriger, donner si possible un contre-exemple et ne plus jamais faire une telle erreur. L'erreur peut-être une rédaction insuffisante.

Attention ceci n'est pas une fiction mais est tiré de faits réels.

• **Erreur 1.**
Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions f, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. On fixe $f \in \mathscr{S}$ un élément de f et on pose $g = f'$. On alors

$$\begin{aligned} g = f' \quad &\Rightarrow \quad g' = f'' = -f \quad &\text{car } f \in \mathscr{S}, \\ &\Rightarrow \quad g'' = -f'. \end{aligned}$$

• **Erreur 2.**
On considère l'assertion P_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n + 1$.

• **Erreur 3.**
Soit f l'unique élément de $\mathscr{S}$ (voir plus haut pour la définition de $\mathscr{S}$ et on admet que $\mathscr{S}$ admet un unique élément). On désire montrer que f est paire. Procédons par l'absurde et supposons que f est impaire. Alors [...] et donc $0 = 1$ ce qui est absurde. Donc la fonction f n'est pas impaire et donc f est paire.

• **Erreur 4.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6x + 2.$$

• **Erreur 5.**
Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{-1}{\sqrt{3x^2+1}}$. La fonction u est continue dans $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction e^u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

• **Erreur 6.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$. Puisque $f(0)$ est constant, on en déduit que $f'(0) = 0$.

• **Erreur 7.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 0$. Alors la fonction $f(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

• **Erreur 8.**
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x^2 + 1 \end{array}$.

• **Erreur 9.**
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x)^2 = 1 - g(x)^2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \sqrt{1 - g(x)^2}.$$

• **Erreur 10.**
Soient f l'unique élément de $\mathscr{S}$ et $g = f'$. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on veut montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x)f(x-a) - g(a)g(x-a).$$

Pour ce faire, nous allons montrer que cette fonction est un élément de $\mathscr{S}$ et par unicité, nous pourrons conclure. D'une part,

$$f(0) = f(x)f(-a) - g(a)g(-a) = [\dots] = 1$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x)f'(x-a) - g(a)g'(x-a) = [\dots] = f(x)f'(x-a) + g(a)f(x-a).$$

Donc

$$f'(0) = f(0)f'(-a) + g(a)f(-a) = [\dots] = 0.$$

Enfin, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = [\dots] = -\left(f(x)f(x-a) - g(a)g(x-a)\right) = -f(x).$$

Donc la fonction $x \mapsto f(x)f(x-a) - g(a)g(x-a)$ vérifie toutes les conditions pour appartenir à $\mathscr{S}$ et on conclut que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x)f(x-a) - g(a)g(x-a).$$

• **Erreur 11.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion P_n : 3 divise $4^n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{Z}$,

$$4^n + 1 = 3k \qquad \Rightarrow \qquad [\dots] \qquad \Rightarrow \qquad \exists k' \in \mathbb{Z}, \quad 4^{n+1} + 1 = 3k'.$$

donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_n \Rightarrow P_{n+1})$.

• **Erreur 12.**
Soient f_1 et f_2 deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $t \in [0;1]$.
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = tf_1 + (1-t)f_2.$$

• **Erreur 13.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère Q_n l'assertion : 3 divise $4^n - 1$. Démontrons que Q_n est vraie par récurrence.
Initialisation. Si $n = 1$, $4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$ et 3 divise 3 donc Q_1 est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons Q_n vraie alors $[\dots]$ et donc Q_{n+1} est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion Q_n est vraie.

• **Erreur 14.**
Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = f(a)f(x-a) - g(a)g(x-a).$$

La fonction F est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = f'(a)f(x-a) + f(a)f'(x-a) - g'(a)g(x-a) - g(a)g'(x-a).$$

• **Erreur 15.**
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant f(x)^2 \leqslant 1$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \leqslant 1 \qquad \text{ou} \qquad f(x) \geqslant -1.$$

Donc f est bornée.

• **Erreur 16.**
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$. On a

$$f(T) = f(0) \qquad \Rightarrow \qquad f'(T) = f'(0).$$