Devoir Maison 2

A rendre pour le jeudi 18/10

La qualité de la rédaction entrera pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Une marge doit être laissée au correcteur. Les questions doivent être référencées par leur numéro complet. Les résultats doivent être soulignés ou encadrés. La réflexion en groupe est autorisée mais la rédaction doit être ***personnelle****. La moindre suspicion de recopiage entrainera l'annulation de la copie du copieur et du copié.*

Exercice I

L'objectif de ce problème est d'étudier le mouvement d'un point d'une roue d'un vélo avançant en ligne droite.
On regarde le cycliste de profil, son mouvement étant plan, on se place dans le plan complexe. On note O l'origine, d'affixe 0. On pose $\Omega(\omega)$ le centre de la roue avant du cycliste et on fixe $M(z)$ un point de la roue.

Partie A : étude préliminaire, dérivation de l'exponentielle complexe

Définition I.1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note alors

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f_1(t) = \mathrm{Re}\,(f(t)) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f_2(t) = \mathrm{Im}\,(f(t)) \end{array}$$

Alors naturellement $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$. On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t).$$

Remarques 1 :

- Si $f = gh$ avec g et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables alors f est dérivable et l'on a toujours $f' = g'h + gh'$.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ possède une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, alors f est une fonction constante (complexe !) : $\exists C \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = C$.

IA.1 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \mathrm{e}^{(a+ib)t} \end{array}.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

IA.2 Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifier par f, c'est-à-dire une relation entre f' et f.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On souhaite maintenant déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_1(\alpha)$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad y'(t) + \alpha y(t) = 0.$$

Soient y un élément de $\mathscr{S}_1(\alpha)$ et $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

IA.3 Justifier que y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

IA.4 En déduire que

$$\mathscr{S}_1(\alpha) = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \;\middle|\; A \in \mathbb{C} \right\}.$$

Partie B : un premier mouvement

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deux fois dérivables (cf DM1) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u''(t) + \theta^2 u(t) = 0.$$

On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_2$.

IB.1 Soit $A \in \mathbb{C}$, vérifier que la fonction

$$u_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t}. \end{array}$$

est dans $\mathscr{S}_2$.

IB.2 Soient u un élément de $\mathscr{S}_2$ et y la fonction définie par

$$y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}. \end{array}$$

Montrer que $y' \in \mathscr{S}_1(2i\theta)$.

IB.3 Donner une primitive de y' et en déduire une expression de y.

Rappel/remarque : si F est une primitive de f' alors il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $f = F + C$.

IB.4 En déduire que

$$\mathscr{S}_2 = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

IB.5 Montrer que l'on a également

$$\mathscr{S}_2 = \left\{ t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

IB.6 Soit M un point mobile du plan dont l'affixe est donnée à chaque instant t par $z(t)$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que le mouvement de M est tel que z soit deux fois dérivable et vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} z''(t) = -\theta^2 z(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ z(0) = z_0 \\ z'(0) = -i\theta z_0. \end{cases}$$

Déterminer la fonction z sur $\mathbb{R}$ en fonction de z_0 et θ.

IB.7 Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la transformation du plan φ_t définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\varphi_t : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z_0 \mapsto \varphi_t(z_0) = z(t). \end{array}$$

Déterminer, suivant les valeurs de t, l'ensemble des points fixes de φ_t, c'est-à-dire l'ensemble des complexes $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_t(z_0) = z_0$.

IB.8 A quelle transformation du plan correspond φ_t ? Si $z_0 = iR$, avec $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, calculer $z\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$ et préciser sans justifier à quoi correspond la trajectoire de M.

Partie C : un deuxième mouvement

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\mathscr{S}_3$ l'ensemble des fonctions $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v''(t) + \theta^2 v(t) = \theta^2 \omega.$$

IC.1 Déterminer l'ensemble des fonctions constantes appartenant à $\mathscr{S}_3$.

IC.2 Soit $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \omega$ et v un élément quelconque de $\mathscr{S}_3$. Montrer que $v - v_0$ est un élément de $\mathscr{S}_2$.

IC.3 En déduire que

$$\mathscr{S}_3 = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

IC.4 Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} z''(t) + \theta^2 z(t) = \boldsymbol{\theta^2}\omega, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ z(0) = z_0, \\ z'(0) = -i\theta\left(z_0 - \omega\right). \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer $z(t)$ en fonction de z_0, ω et θ.

IC.5 Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la transformation du plan ψ_t définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\psi_t : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z_0 \mapsto \varphi_t\left(z_0\right) = z(t). \end{array}$$

Déterminer, suivant la valeur de t, l'ensemble des points fixes de ψ_t.

IC.6 A quelle transformation du plan correspond ψ_t ?

Partie D : le mouvement complet

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. On considère désormais que le point $\Omega\left(\omega\right)$ se déplace au cours du temps et que son affixe ω est une fonction du temps : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\omega(t) = 2\pi R t + iR$. Le point M possède alors une affixe z solution du problème suivant :

$$\begin{cases} z''(t) + \theta^2 z(t) = \theta^2\omega(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ z(0) = 2iR, \\ z'(0) = R\left(2\pi + \theta\right). \end{cases}$$

On note $\mathscr{S}_4$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) + \theta^2 f(t) = \theta^2\omega(t).$$

ID.1 Déterminer f_0 une solution polynomiale de $\mathscr{S}_4$.

ID.2 Montrer que $z - f_0$ est une solution de $\mathscr{S}_2$.

ID.3 En déduire l'expression de la fonction z en fonction de θ et R.

ID.4 Exprimer alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \mathrm{Re}\left(z(t)\right)$ et $y(t) = \mathrm{Im}\left(z(t)\right)$.

Exercice II

Exercice facultatif

Soit $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \qquad \begin{array}{r} \varphi\left(x+y\right) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y). \end{array}$$

II.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n\varphi(1)$.

II.2 Montrer que $\varphi(-1) = -\varphi(1)$ et en déduire pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\varphi(p)$ en fonction de $\varphi(1)$.

II.3 Pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, exprimer $\varphi\left(\frac{1}{q}\right)$ en fonction de $\varphi(1)$.

II.4 En déduire les deux fonctions φ solutions à notre problème.