Corrigé du Devoir Maison 2

Solution de l'exercice I

Partie A : étude préliminaire, dérivation de l'exponentielle complexe

IA.1 Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{ibt} = \mathrm{e}^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right) = \mathrm{e}^{at}\cos(t) + i\,\mathrm{e}^{a}\sin(t) = f_1(t) + if_2(t).$$

avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt)$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{at}\sin(bt)$. Les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc d'après la définition I.1, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) = a\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt) - b\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + i\left[a\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + b\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R},\\ \qquad f'(t) = a\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt) - b\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + i\left[a\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + b\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\right].\end{array}}$$

IA.2 D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= a\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt) - b\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + i\left[a\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + b\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\right]\\
&= a\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt) + ia\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + i^2b\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt) + ib\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\\
&= a\,\mathrm{e}^{at+ibt} + i\left[b\,\mathrm{e}^{at}\cos(bt) + ib\,\mathrm{e}^{at}\sin(bt)\right]\\
&= a\,\mathrm{e}^{at+ibt} + i\left[b\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{ibt}\right]\\
&= (a+ib)\,\mathrm{e}^{(a+ib)t}.
\end{aligned}$$

Ainsi, f vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = (a+ib)\,f(t).}$$

IA.3 D'après la question IA.1, on sait que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $y \in \mathscr{S}_1(\alpha)$ et donc par hypothèse, y est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etant un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf la remarque 1). De plus,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_1'(t) &= y'(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} + \alpha y(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} && \text{d'après la question IA.1}\\
&= -\alpha y(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} + \alpha y(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} && \text{car } y \in \mathscr{S}_1(\alpha)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } y \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R},\ y(t) = 0.}$$

IA.4 On procède par analyse/synthèse (ou encore par double inclusion). *Analyse.* Soit $y \in \mathscr{S}_1(\alpha)$. Alors d'après la question précédente, on a montré que la fonction $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto y(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ possède une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après la remarque 1,

$$\exists A \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t} = A.$$

Autrement dit,

$$\exists A \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Donc $y \in \{t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \mid A \in \mathbb{C}\}$.

Synthèse. On vérifie que les fonctions $t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$, avec $A \in \mathbb{C}$. sont bien solutions, c'est-à-dire sont dans $\mathscr{S}_1(\alpha)$. Soit $A \in \mathbb{C}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Alors d'après la question IA.1 la fonction y est dérivable. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = -\alpha A\,\mathrm{e}^{-\alpha t} = -\alpha y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \alpha y(t) = 0.$$

Finalement on a vérifié que $y \in \mathscr{S}_1(\alpha)$.

En conclusion, nous avons bien montré que

$$\boxed{\mathscr{S}_1(\alpha) = \left\{t \mapsto A\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \,\middle|\, A \in \mathbb{C}\right\}.}$$

Partie B : un premier mouvement

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deux fois dérivables (cf DM1) telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u''(t) + \theta^2 u(t) = 0.$$

On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_2$.

IB.1 Soit $A \in \mathbb{C}$ et $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t}$. On sait d'après la question IA.1 que u_0 est dérivable et de plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_0'(t) = i\theta A\,\mathrm{e}^{i\theta t} = i\theta u_0(t). \tag{1}$$

Encore une fois, u_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction u_0' est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire u_0 est deux fois dérivable et de plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_0''(t) = \left(u_0'\right)'(t) = i\theta u_0'(t).$$

On utilise à nouveau l'équation (1). On obtient que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_0''(t) = i\theta\left(i\theta u_0(t)\right) = -\theta^2 u_0(t).$$

Ainsi u_0 est deux fois dérivable et $u_0'' + \theta^2 u_0 = 0$.

$\boxed{\text{Conclusion, la fonction } u_0 \text{ est un élément de } \mathscr{S}_2.}$

IB.2 La fonction u est dans $\mathscr{S}_2$ et est donc deux fois dérivable donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-i\theta t}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf question IA.1). Donc la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (cf remarque 1). De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - i\theta u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}.$$

Puisque u est deux fois dérivable, u' est dérivable. Donc la fonction y' est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables (y est donc deux fois dérivable). De plus

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left(y'\right)'(t) = y''(t) &= u''(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - i\theta u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - i\theta u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - i\theta\left(-i\theta\right)u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}\\ &= u''(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - 2i\theta u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - \theta^2 u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}.\end{aligned}$$

Or $u \in \mathscr{S}_2$ donc $u'' = -\theta^2 u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left(y'\right)'(t) &= -\theta^2 u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - 2i\theta u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - \theta^2 u(t)\,\mathrm{e}^{i\theta t}\\ &= -2\theta^2 u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} - 2i\theta u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}\\ &= -2i\theta\left(-i\theta u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + u'(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}\right)\\ &= -2i\theta y'(t).\end{aligned}$$

On a donc montré que y' est dérivable et que $\left(y'\right)' + 2i\theta y' = 0$.

$\boxed{\text{En conclusion, la fonction } y' \text{ est un élément de } \mathscr{S}_1\left(2i\theta\right).}$

IB.3 D'après la question précédente, $y' \in \mathscr{S}_1\left(2i\theta\right)$ et donc d'après la question IA.4, on en déduit qu'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y'(t) = A\,\mathrm{e}^{-2i\theta t}.$$

D'après la question IA.1, la fonction $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto \frac{A}{-2i\theta}\,\mathrm{e}^{-2i\theta t}$ (car $\theta \neq 0$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut y'. Donc F est une primitive de y'. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \qquad y(t) = F(t) + C = \frac{A}{-2i\theta}\,\mathrm{e}^{-2i\theta t} + C = \tilde{A}\,\mathrm{e}^{-2i\theta t} + C,$$

avec $\tilde{A} = \frac{A}{-2i\theta} \in \mathbb{C}$ une constante complexe. Ainsi

$$\boxed{\exists\left(\tilde{A}, C\right) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \tilde{A}\,\mathrm{e}^{-2i\theta t} + C.}$$

IB.4 Montrons l'égalité des ensembles par double inclusion. Soit $u \in \mathscr{S}_2$ et posons $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto u(t)\,\mathrm{e}^{-i\theta t}$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{i\theta t}$. De plus, d'après les questions précédentes, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ deux constantes telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = A + B\,\mathrm{e}^{-2i\theta t}.$$

D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{i\theta t} = \left(A + B\,\mathrm{e}^{-2i\theta t}\right)\mathrm{e}^{i\theta t} = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}.$$

Ainsi, $u \in \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.
Réciproquement, soit $u \in \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$, il existe donc $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}$. La fonction u est dérivable deux fois et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = i\theta A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - i\theta B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u''(t) = -\theta^2 A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - \theta^2 B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} = -\theta^2 u(t)$$

ce qui démontre que $u \in \mathscr{S}_2$.
Ainsi, nous avons montré que

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.}$$

IB.5 A nouveau, on procède par double inclusion. Soit $u \in \mathscr{S}_2$, alors d'après la question précédente, il existe $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) &= A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \\ &= A\cos(\theta t) + iA\sin(\theta t) + B\cos(\theta t) - iB\sin(\theta t) \\ &= (A+B)\cos(\theta t) + (iA - iB)\sin(\theta t) \\ &= \tilde{A}\cos(\theta t) + \tilde{B}\sin(\theta t), \end{aligned}$$

où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont deux constantes complexes définies par $\tilde{A} = A + B \in \mathbb{C}$ et $\tilde{B} = iA - iB \in \mathbb{C}$. Donc $u \in \left\{ t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ et par suite

$$\mathscr{S}_2 \subseteq \left\{ t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Réciproquement, si $u \in \left\{ t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ alors il existe $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) &= A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \\ &= A\frac{\mathrm{e}^{i\theta t} + \mathrm{e}^{-i\theta t}}{2} + B\frac{\mathrm{e}^{i\theta t} - \mathrm{e}^{-i\theta t}}{2i} && \text{par les formules d'Euler} \\ &= \frac{A}{2}\left(\mathrm{e}^{i\theta t} + \mathrm{e}^{-i\theta t}\right) - \frac{iB}{2}\left(\mathrm{e}^{i\theta t} - \mathrm{e}^{-i\theta t}\right) \\ &= \frac{A - iB}{2}\,\mathrm{e}^{i\theta t} + \frac{A + iB}{2}\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \\ &= \tilde{A}\,\mathrm{e}^{i\theta t} + \tilde{B}\,\mathrm{e}^{-i\theta t}, \end{aligned}$$

où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont deux constantes complexes définies par $\tilde{A} = \frac{A-iB}{2} \in \mathbb{C}$ et $\tilde{B} = \frac{A+iB}{2} \in \mathbb{C}$. Donc $u \in \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ qui est aussi $\mathscr{S}_2$ d'après la question précédente. Ainsi

$$\left\{ t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\} \subseteq \mathscr{S}_2.$$

Finalement, nous avons montré que

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{ t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.}$$

IB.6 La fonction z est deux fois dérivable et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + \theta^2 z(t) = 0.$$

Donc $z \in \mathscr{S}_2$. Donc d'après la question IB.4, il existe $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{i\theta t}.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = i\theta A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - i\theta B\,\mathrm{e}^{i\theta t} = i\theta\left(A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - B\,\mathrm{e}^{i\theta t}\right).$$

Ainsi
$$\begin{cases} z(0) &= z_0 \\ z'(0) &= -i\theta z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B &= z_0 \\ i\theta\,(A-B) &= -i\theta z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B &= z_0 \\ A-B &= -z_0 \end{cases} \quad \text{car } \theta \neq 0.$$
Donc en faisant la somme des lignes ou la différence, on obtient que
$$\begin{cases} A &= 0 \\ B &= z_0 \end{cases}$$
D'où
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = z_0\,\mathrm{e}^{-i\theta t}.}$$
On pouvait utiliser également l'écriture $t \mapsto A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$, la recherche des coefficients A et B doit alors aboutir au même résultat.

IB.7 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on a
$$\begin{aligned} \varphi_t(z_0) = z_0 &\Leftrightarrow z_0\,\mathrm{e}^{-i\theta t} = z_0 \\ &\Leftrightarrow z_0\left(\mathrm{e}^{-i\theta t} - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z_0 = 0 \quad \text{OU} \quad \mathrm{e}^{-i\theta t} = 1 \\ &\Leftrightarrow z_0 = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta t = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow z_0 = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{2k\pi}{\theta} \quad \text{car } \theta \neq 0. \end{aligned}$$

En conclusion,

- Si $t \in \left\{ \frac{2k\pi}{\theta} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors tous les complexes z_0 sont des points fixes :
$$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \qquad \varphi_t(z_0) = z_0.$$
- Si $t \notin \left\{ \frac{2k\pi}{\theta} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors l'unique point fixe est le complexe nul :
$$\varphi_t(z_0) = z_0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = 0.$$

IB.8 Par définition de φ_t et la question IB.6, on a
$$\varphi_t : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z_0 \mapsto \varphi_t(z_0) = z(t) = z_0\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \end{array}$$
$\boxed{\text{Donc on reconnaît une rotation de centre } O(0) \text{ et d'angle } -\theta t.}$

Notons que lorsque que $t \in \left\{ \frac{2k\pi}{\theta} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ la rotation est dite triviale ou dégénérée et correspond à l'identité de $\mathbb{C}$ (tous les complexes sont fixes).

Si $z_0 = iR$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = iR\,\mathrm{e}^{-i\theta t}$. En particulier
$$z\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = iR\,\mathrm{e}^{-i\theta\frac{\pi}{2\theta}} = iR\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = iR \times (-i) = R.$$
$\boxed{\text{On a donc } z\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = R \text{ et la trajectoire de } M \text{ est un cercle de centre } O \text{ et de rayon } R.}$

Partie C : un deuxième mouvement

IC.1 Soient $a \in \mathbb{C}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto a$. Naturellement la fonction v est deux fois dérivable et $v'' = v' = 0$. Ainsi
$$v \in \mathscr{S}_3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 + \theta^2 a = \theta^2 \omega \quad \Leftrightarrow \quad a = \omega \quad \text{car } \theta \neq 0.$$
$\boxed{\text{L'unique fonction constante dans } \mathscr{S}_3 \text{ est la fonction constante égale à } \omega.}$

IC.2 La fonction v_0 est deux fois dérivable et la fonction v également puisque $v \in \mathscr{S}_3$. Donc la fonction $v - v_0$ est deux fois dérivable et
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (v - v_0)''(t) = v''(t) - v_0''(t) = v''(t).$$
Or $v \in \mathscr{S}_3$ donc $v'' = -\theta^2 v + \theta^2\omega = -\theta^2 v + \theta^2 v_0 = -\theta^2(v - v_0)$. D'où
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (v - v_0)''(t) = -\theta^2(v - v_0)(t)$$
et on note que $\boxed{v - v_0 \in \mathscr{S}_2.}$

IC.3 On procède par double inclusion. Soit $v \in \mathscr{S}_2$, alors par la question précédente, $v - v_0 \in \mathscr{S}_2$. Par conséquent, d'après la question IB.4, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) - v_0(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + v_0(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega.$$

Donc $v \in \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ et

$$\mathscr{S}_3 \subseteq \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Réciproquement si $v \in \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega,$$

alors v est dérivable deux fois et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad v'(t) &= i\theta A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - i\theta B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \\ \text{et} \quad v''(t) &= -\theta^2 A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - \theta^2 B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} \\ &= -\theta^2 \left(A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}\right) \\ &= -\theta^2 \left(v(t) - \omega\right) \\ &= -\theta^2 v(t) + \theta^2 \omega. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v''(t) + \theta^2 v(t) = \theta^2 \omega$$

et la fonction v est un élément de $\mathscr{S}_3$. Donc $\left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\} \subseteq \mathscr{S}_3$.
Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \left\{ t \mapsto A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}.}$$

IC.4 Soient $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{cases} z''(t) + \theta^2 z(t) = \omega, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \\ z(0) = z_0, \\ z'(0) = -i\theta\left(z_0 - \omega\right) \end{cases}$$

et $t \in \mathbb{R}$. La première ligne implique que $z \in \mathscr{S}_3$ donc d'après la question précédente, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega$. La dérivée est alors donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = i\theta\left(A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \begin{cases} z(0) = z_0, \\ z'(0) = -i\theta\left(z_0 - \omega\right) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + \omega = z_0, \\ i\theta\left(A - B\right) = -i\theta\left(z_0 - \omega\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = z_0 - \omega, \\ A - B = \omega - z_0 \end{cases} \quad \text{car } \theta \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = z_0 - \omega \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \left(z_0 - \omega\right)\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega.}$$

IC.5 Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \psi_t\left(z_0\right) = z_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z_0 - \omega\right)\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega = z_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z_0 - \omega\right)\mathrm{e}^{-i\theta t} = z_0 - \omega \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z_0 - \omega\right)\left(\mathrm{e}^{-i\theta t} - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z_0 = \omega \quad \text{OU} \quad \mathrm{e}^{-i\theta t} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z_0 = \omega \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -\theta t = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad z_0 = \omega \quad \text{OU} \quad \exists \tilde{k} = -k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{2\tilde{k}\pi}{\theta} \qquad \text{car } \theta \neq 0. \end{aligned}$$

> En conclusion,
> - Si $t \in \left\{ \frac{2k\pi}{\theta} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors tous les complexes z_0 sont des points fixes :
> $$\forall z_0 \in \mathbb{C}, \qquad \psi_t\left(z_0\right) = z_0.$$
> - Si $t \notin \left\{ \frac{2k\pi}{\theta} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors l'unique point fixe est le complexe ω :
> $$\psi_t\left(z_0\right) = z_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_0 = \omega.$$

IC.6 Par définition de la fonction ψ_t et par la question IC.4, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $\psi_t\left(z_0\right) = \left(z_0 - \omega\right) \mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega$ ce qui correspond à la rotation de centre $\Omega\left(\omega\right)$ et d'angle $-\theta t$.

Partie D : le mouvement complet

ID.1 On cherche du côté des fonctions affines. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto at + b$. La fonction f est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_0'(t) = a$ et $f_0''(t) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} f_0 \in \mathscr{S}_4 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 + \theta^2\left(at + b\right) = \theta^2 \omega(t) = \theta^2\left(2\pi R t + iR\right) \\ &\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad at + b = 2\pi R t + iR \qquad \text{car } \theta \neq 0. \end{aligned}$$

Notez que l'on ne cherche pas toutes les solutions, juste une qui fonctionne. En prenant $a = 2\pi R$ et $b = iR$, c'est-à-dire $f_0 = \omega$ l'équation précédente est vérifiée et donc $f_0 = \omega \in \mathscr{S}_4$.

> La fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
> $$f_0(t) = 2\pi R t + iR = \omega(t)$$
> est une fonction polynomiale de $\mathscr{S}_4$.

ID.2 On sait que $z \in \mathscr{S}_4$ et $f_0 \in \mathscr{S}_4$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} z''(t) + \theta^2 z(t) &= \theta^2 \omega(t) \\ f_0''(t) + \theta^2 f_0(t) &= \theta^2 \omega(t) \end{cases}$$

En faisant la différence des deux lignes, on obtient que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - f_0''(t) + \theta^2\left(z(t) - f_0(t)\right) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(z - f_0\right)''(t) + \theta^2\left(z(t) - f_0(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \boxed{z - f_0 \in \mathscr{S}_2.} \end{aligned}$$

ID.3 Par conséquent et d'après la question IB.4, il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) - f_0(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}.$$

Donc d'après la question ID.1,

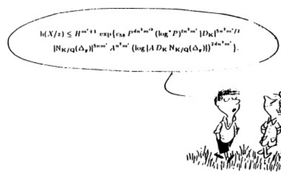
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = A\,\mathrm{e}^{i\theta t} + B\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega(t).$$

La dérivée de ω étant $2\pi R$, on en déduit que z' est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = i\theta\left(A\,\mathrm{e}^{i\theta t} - B\,\mathrm{e}^{-i\theta t}\right) + 2\pi R.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \begin{cases} z(0) &= 2iR, \\ z'(0) &= R\left(2\pi + \theta\right) \end{cases} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A + B + iR &= 2iR, \\ i\theta\left(A - B\right) + 2\pi R &= 2\pi R + \theta R \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A + B &= iR, \\ A - B &= \frac{R}{i} = -iR \end{cases} \qquad \text{car } \theta \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A &= 0, \\ B &= iR. \end{cases} \end{aligned}$$



De cette façon,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = iR\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + \omega(t) = iR\,\mathrm{e}^{-i\theta t} + 2\pi R t + iR.}$$

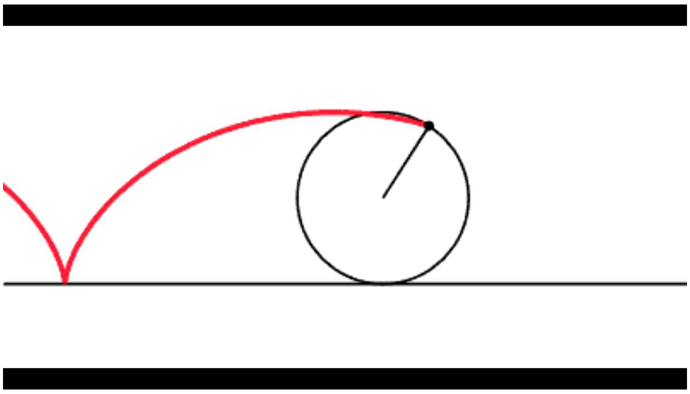
ID.4 Ecrivons z sous forme trigonométrique :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad z(t) &= iR\left(\cos\left(\theta t\right)-i\sin\left(\theta t\right)\right)+2\pi Rt+iR\\ &= R\left(2\pi t+\sin\left(\theta t\right)\right)+iR\left(\cos\left(\theta t\right)+1\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x(t)=R\left(2\pi t+\sin\left(\theta t\right)\right)\\ y(t)=R\left(\cos\left(\theta t\right)+1\right).\end{cases}}$$

C'est l'équation dite paramétrique de la cycloïde qui est le mouvement décrit par M.



En voici une animation : `https://www.youtube.com/watch?v=ck6FbMXSgL4`

Solution de l'exercice II

Soit $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ telle que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2,\qquad \varphi\left(x+y\right)=\varphi(x)+\varphi(y) \tag{2}$$

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y). \tag{3}$$

II.1 On procède par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n)$ par : « $\varphi(n)=n\varphi(1)$ ».
Initialisation. Si $n=0$, montrons que $\varphi(0)=0$. L'astuce est de prendre $x=0$ et $y=0$, alors, par hypothèse sur φ, on a

$$\varphi(0)=\varphi\left(0+0\right)\overset{(2)}{=}\varphi(0)+\varphi(0).$$

En soustrayant les deux membres de cette égalité par $\varphi(0)$, on obtient

$$\varphi(0)=0=0\times\varphi(1).$$

Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie et démontrons que $P(n+1)$ est alors vraie. Puisque $P(n)$ est vraie, on a par hypothèse que $\varphi(n)=n\,\varphi(1)$. A l'aide de la propriété (2), on obtient alors

$$\varphi(n+1)=\varphi(n)+\varphi(1)=n\,\varphi(1)+\varphi(1)=(n+1)\,\varphi(1).$$

Donc $P(n+1)$ est vraie et on a montré que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$.
Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \varphi(n)=n\,\varphi(1).}$$

II.2 Par la propriété (2) avec $x=1$ et $y=-1$, on a

$$\varphi(0)=\varphi(1+(-1))=\varphi(1)+\varphi(-1).$$

Or d'après la question précédente, $\varphi(0)=0\,\varphi(1)=0$. Donc $\varphi(1)+\varphi(-1)=0$. En soustrayant des deux côté par $\varphi(1)$, on obtient que

$$\boxed{\varphi(-1)=-\,\varphi(1).}$$

Soit $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on procède de même en utilisant (2) avec $x = p$ et $y = -p$:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(p - p) = \varphi(p) + \varphi(-p).$$

Ainsi $\varphi(-p) = -\varphi(p)$. Or $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, et donc $-p \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $\varphi(-p) = -p\,\varphi(1)$. Et donc on obtient que

$$-p\,\varphi(1) = -\varphi(p) \Rightarrow p\,\varphi(1) = \varphi(p).$$

Comme, d'après la question précédente, la dernière égalité est aussi vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, \qquad \varphi(p) = p\,\varphi(1).}$$

II.3 L'astuce est la même que dans les questions précédentes mais pour la multiplication cette fois-ci. Soit $q \in \mathbb{Z}^*$. En utilisant (3) avec $x = \frac{1}{q}$ et $y = q$, on a

$$\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{q} \times q\right) = \varphi\left(\frac{1}{q}\right)\varphi(q).$$

D'après la question II.2, $\varphi(q) = q\,\varphi(1)$. Donc $\varphi(1) = \varphi\left(\frac{1}{q}\right) q\,\varphi(1)$.
Premier cas : $\varphi(1) = 0$. Alors d'après (3),

$$\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi\left(\frac{1}{q} \times 1\right) = \varphi\left(\frac{1}{q}\right)\varphi(1) = 0.$$

Second cas : $\varphi(1) \neq 0$. Alors en divisant par $\varphi(1)$, on obtient

$$\varphi\left(\frac{1}{q}\right) q = 1.$$

Puisque $q \neq 0$, $\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$. Conclusion,

$$\forall q \in \mathbb{Z}^*, \qquad \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad \varphi(1) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \varphi(1) = 0 \end{cases}.$$

II.4 Premier cas, $\varphi(1) = 0$. Alors d'après la question II.2, on a pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\varphi(p) = 0$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = p/q$. On sait que $\varphi(p) = 0$. Alors, d'après (3),

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(p)\,\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = 0 \times 0 = 0.$$

Dans ce cas la fonction φ est la fonction nulle sur $\mathbb{Q}$. Notez qu'en réalité, nous n'avons pas besoin de la question précédente pour traiter cette question.
Second cas, si $\varphi(1) \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = p/q$. D'après (3),

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(p)\,\varphi\left(\frac{1}{q}\right).$$

D'après les questions II.2 et II.3, on obtient

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right) = p\,\varphi(1)\frac{1}{q}.$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer $\varphi(1)$. Par (3), $\varphi(1) = \varphi\left(1^2\right) = \varphi(1)\,\varphi(1) = \varphi(1)^2$. Or $\varphi(1) \neq 0$ donc en simplifiant par $\varphi(1)$, on a $\varphi(1) = 1$. Par conséquent,

$$\varphi(r) = \frac{p}{q} = r.$$

Ceci étant vrai pour tout rationnel on en déduit que φ est la fonction identité sur $\mathbb{Q}$.
Il est facile de vérifier que la fonction nulle et la fonction identité sont solutions de (2) et (3).
Conclusion :

$$\boxed{\text{les seules deux fonctions solutions du problème (2) et (3) sont la fonction nulle et la fonction identité.}}$$