Devoir Maison 3

A rendre pour le jeudi 08/11

Exercice I (Restituer)

I.1 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante : $[(1-i)z]^3 = -i$.

I.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.

I.3 Résoudre proprement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$|2x-4| \leqslant |x+2|.$$

Exercice II (Découvrir)

Définition II.1

- On appelle matrice 2×2 de $\mathbb{R}$, toute famille $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ de réels que l'on range en un tableau de nombres :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 :

$$\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \middle| \forall (i,j) \in \{1;2\}^2,\ a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

On munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

- de l'addition $+$ définie pour tout $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $M' = \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$M + M' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+a'_{1,1} & a_{1,2}+a'_{1,2} \\ a_{2,1}+a'_{2,1} & a_{2,2}+a'_{2,2} \end{pmatrix}$$

- de la multiplication $\times$ définie pour tout $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $M' = \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$M \times M' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times a'_{1,1} + a_{1,2} \times a'_{2,1} & a_{1,1} \times a'_{1,2} + a_{1,2} \times a'_{2,2} \\ a_{2,1} \times a'_{1,1} + a_{2,2} \times a'_{2,1} & a_{2,1} \times a'_{1,2} + a_{2,2} \times a'_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On note $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $I_2 = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in \{1;2\}^2$ par $\begin{cases} a_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \\ a_{i,j} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Partie A : Découverte des matrices.

IIA.1 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer en détaillant les calculs $M + O_2$, $O_2 \times M$ et $M \times O_2$.

IIA.2 Nier l'assertion suivante puis démontrer que la négation obtenue est vraie.

$$\exists M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \forall M' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \qquad M + M' \neq O_2.$$

IIA.3 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer I_2 puis calculer $I_2 + M$, $I_2 \times M$ et $M \times I_2$.

Pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$, on considère le prédicat suivant

$$Q(M): \qquad (\exists M' \in M_2(\mathbb{R}),\quad MM' = M'M = I_2.)$$

IIA.4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $Q(D_\lambda)$ est vraie. Que vaut D_0 ?

IIA.5 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $Q(A)$ est fausse.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

IIA.6 Calculer B^2, B^3 et B^4.

IIA.7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit B^n par récurrence par $B^0 = I_2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $B^{n+1} = B^n \times B$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n.

Partie B : Un sous-ensemble particulier.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la multiplication d'une matrice par un réel par :

$$\lambda M = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \lambda \times a_{1,2} \\ \lambda \times a_{2,1} & \lambda \times a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On considère l'élément de $M_2(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose

$$\mathscr{E} = \left\{ \lambda I_2 + \mu A \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

IIB.1 Montrer que l'on a unicité de l'écriture pour tout élément de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire que

$$\forall M \in \mathscr{E}, \quad \exists! \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \qquad M = \lambda I_2 + \mu A.$$

IIB.2 Vérifier que si $M \in \mathscr{E}$ et $M' \in \mathscr{E}$ alors $M + M' \in \mathscr{E}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tM \in \mathscr{E}$

IIB.3 Calculer A^2.

IIB.4 Soit $(M, M') \in \mathscr{E}^2$. Calculer MM' et montrer que $MM' \in \mathscr{E}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi \, : \mathbb{C} &\to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ z &\mapsto \mathrm{Re}(z) I_2 + \mathrm{Im}(z) A. \end{aligned}$$

IIB.5 Que vaut $\varphi(i)$? Vérifier que $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2)$.

IIB.6 A l'aide des questions précédentes, montrer que

(a) la fonction φ est injective, c'est-à-dire que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\varphi(z) = \varphi(z') \qquad \Rightarrow \qquad z = z'.$$

(b) la fonction φ est surjective **sur $\mathscr{E}$**, c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathscr{E}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(z) = M$.

(c) la fonction φ est un morphisme pour $+$ c'est-à-dire que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z').$$

(d) la fonction φ est un morphisme pour $\times$ c'est-à-dire que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\varphi(zz') = \varphi(z)\,\varphi(z').$$

IIB.7 Montrer que $\mathscr{E} \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice III (Rechercher - facultatif)

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

III.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $S_n = \frac{-1}{n+1}$.

III.2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.