Corrigé du Devoir Maison 3

Solution de l'exercice I

I.1 Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition, $[(1-i)z]^3 = -i$ si et seulement si $(1-i)z$ est une racine troisième de $-i$. Or $-i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc les racines troisièmes de $-i$ sont de la forme $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2\}$. Ainsi, il existe $k \in \{0,1,2\}$ tel que

$$(1-i)z = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{3}} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{1}{1-i}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{3}}.$$

On met $1-i$ sous forme polaire. L'égalité ci-dessus est donc équivalente à

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{3}} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{3}} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{3}+i\frac{\pi}{4}}.$$

Finalement, on conclut que

$$\boxed{[(1-i)z]^3 = -i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \{0,1,2\}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}+i\frac{2k\pi}{3}}.}$$

I.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède comme dans l'exercice sur la somme des $|i-j|$, il est nécessaire de discuter sur la position de i par rapport à j pour expliciter le maximum entre i et j. Tout d'abord on extrait le terme où $i=n$,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) + \sum_{j=1}^{n} \max(n,j).$$

On découpe la somme intérieure de la première somme suivant si $j \leqslant i$ ou si $j \geqslant i+1$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j)\right) + \sum_{j=1}^{n} n.\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) + n^2.\end{aligned}$$

A l'aide du changement de variable $k = j-i$ dans la seconde somme, on écrit,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i^2 + \sum_{k=1}^{n-i}(k+i)\right) + n^2\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i^2 + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} + i(n-i)\right) + n^2\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} in + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2} + n^2.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $i' = n-i$ dans la seconde somme pour la simplifier légèrement de la façon suivante,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= n\frac{(n-1)n}{2} + \sum_{i'=1}^{n-1}\frac{i'(i'+1)}{2} + n^2\\ &= n^2\frac{n-1+2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^2+i}{2}\\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2}\\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1+3)}{12}\\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{(3n+n-1)n(n+1)}{6} = \frac{(4n-1)n(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j) = \frac{(4n-1)n(n+1)}{6}.}$$

I.3 Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de

$$|2x-4| \leqslant |x+2|.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathscr{S} \quad \Leftrightarrow \quad -|x+2| \leqslant 2x-4 \leqslant |x+2|.$$

Procédons à une disjonction de cas suivant si $x \leqslant -2$ ou si $x \geqslant -2$. Posons $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S} \cap]-\infty; -2]$ et $\mathscr{S}_2 = \mathscr{S} \cap [-2; +\infty[$ et notons que $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$.

- Déterminons $\mathscr{S}_1$. Si $x \in \mathscr{S}_1$, alors $x \leqslant -2$ et $|x+2| = -x-2$. Donc

$$x \in \mathscr{S}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2 \leqslant 2x-4 \leqslant -x-2 \\ x \leqslant -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 6 \\ 3x \leqslant 2 \\ x \leqslant -2 \end{cases} \quad \text{impossible.}$$

  Donc $\mathscr{S}_1 = \emptyset$.
- Déterminons $\mathscr{S}_2$. Si $x \in \mathscr{S}_2$ alors $|x+2| = x+2$. Donc

$$x \in \mathscr{S}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x-2 \leqslant 2x-4 \leqslant x+2 \\ x \geqslant -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 \leqslant 3x \\ x \leqslant 6 \\ x \geqslant -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 6.$$

  Donc $\mathscr{S}_2 = \left[\frac{2}{3}; 6\right]$.

Au bilan on peut conclure que

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \left[\frac{2}{3}; 6\right].}$$

Solution de l'exercice II

Partie A : Découverte des matrices.

IIA.1 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$M + O_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M.$$

De plus

$$M \times O_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times 0 + b \times 0 & a \times 0 + b \times 0 \\ c \times 0 + d \times 0 & c \times 0 + d \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

De même,

$$O_2 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times a + 0 \times c & 0 \times b + 0 \times d \\ 0 \times a + 0 \times c & 0 \times b + 0 \times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2.$$

Ainsi,

$$\boxed{M + O_2 = M, \qquad M \times O_2 = O_2 \qquad \text{et} \qquad O_2 \times M = O_2.}$$

IIA.2 La négation de

$$\exists M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \, \forall M' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \qquad M + M' \neq O_2.$$

est

$$\boxed{\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \, \exists M' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \qquad M + M' = O_2.}$$

Montrons que cette assertion est vraie. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons alors $M' = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$. Alors,

$$M + M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,
$$M + M' = O_2$$
et l'assertion précédente est vraie.

IIA.3 Par définition, on a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$I_2 + M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b+0 \\ c+0 & d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$$

D'autre part,

$$I_2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times a + 0 \times c & 1 \times b + 0 \times d \\ 0 \times a + 1 \times c & 0 \times b + 1 \times d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M.$$

De la même façon,

$$M \times I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\times 1 + b \times 0 & a \times 0 + b \times 1 \\ c \times 1 + d \times 0 & c \times 0 + d \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M.$$

Conclusion

$$\boxed{I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_2 \times M = M, \qquad M \times I_2 = M.}$$

IIA.4 Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Puisque $\lambda \neq 0$, $1/\lambda$ existe dans $\mathbb{R}$ et l'on a

$$D_\lambda \times D_{\frac{1}{\lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times \frac{1}{\lambda} + 0 \times 0 & \lambda \times 0 + 0 \times \frac{1}{\lambda} \\ 0 \times \frac{1}{\lambda} + \lambda \times 0 & 0 \times 0 + \lambda \times \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

De même on a

$$D_{\frac{1}{\lambda}} \times D_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Puisque l'on a trouvé un élément $D_{\frac{1}{\lambda}}$ qui vérifie les égalités souhaitées,

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad Q\left(D_\lambda\right) \text{ est vraie. De plus, } D_0 = O_2.}$$

IIA.5 Pour montrer que $Q(A)$ est fausse, procédons par l'absurde et supposons que $Q(A)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $AA' = A'A = I_2$. Donc

$$AA' = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 9c & 3b - 9d \\ -a + 3c & -b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} 3a - 9c = 1 \\ 3b - 9d = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 9c = 1 \\ b = 3d \\ a = 3c \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3d \\ a = 3c \\ 9c - 9c = 1 \\ -3d + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = 1.$$

Le résultat étant impossible, on en déduit que l'hypothèse ($Q(A)$ est vraie) est fausse et donc $\boxed{Q(A) \text{ est fausse}}$.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

IIA.6 On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 & 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 \\ 2 \times 0 + 0 \times 2 & 2 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

On en déduit que

$$B^3 = B^2 \times B = I_2 \times B = B \qquad \text{d'après la question IIA.3,}$$

puis

$$B^4 = B^3 \times B = B \times B = B^2 = I_2.$$

Ainsi

$$\boxed{B^2 = I_2, \qquad B^3 = B, \qquad B^4 = I_2.}$$

IIA.7 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la propriété $P(k)$: ($B^{2k} = I_2$ et $B^{2k+1} = B$). Démontrons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ est vraie.

Initialisation. Si $k = 0$, alors $B^{2\times 0} = B^0 = I_2$ et $B^{2\times 0+1} = B^1 = B$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(k)$. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. Puisque $P(k)$ est vraie, on sait que

$$B^{2k} = I_2 \qquad \text{et} \qquad B^{2k+1} = B.$$

En multipliant par B^2 ces deux égalités, on obtient que

$$\begin{aligned} B^{2k} \times B^2 = I_2 \times B^2 \quad \text{et} \quad B^{2k+1}B^2 = B \times B^2 \quad &\Leftrightarrow \quad B^{2k+2} = B^2 \quad \text{et} \quad B^{2k+3} = B^3 \\ &\Leftrightarrow \quad B^{2(k+1)} = B^2 \quad \text{et} \quad B^{2(k+1)} = B^3. \end{aligned}$$

On a vu précédemment que $B^2 = I_2$ et que $B^3 = B \times B^2 = B \times I_2 = B$. Ainsi,

$$B^{2(k+1)} = I_2 \qquad \text{et} \qquad B^{2(k+1)} = B.$$

Donc $P(k+1)$ est vraie. Conclusion pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ B & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

Partie B : Un sous-ensemble particulier.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la multiplication d'une matrice par un réel par :

$$\lambda M = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \lambda \times a_{1,2} \\ \lambda \times a_{2,1} & \lambda \times a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On considère l'élément de $M_2(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose

$$\mathscr{E} = \left\{ \lambda I_2 + \mu A \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

IIB.1 On souhaite montrer que

$$\forall M \in \mathscr{E}, \quad \exists!\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \qquad M = \lambda I_2 + \mu A.$$

Fixons $M \in \mathscr{E}$ alors par définition de $\mathscr{E}$, on sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tel que $M = \lambda I_2 + \mu A$. Pour montrer l'assertion en question il nous faut donc juste démontrer l'unicité. Soient $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda\, I_2 + \mu A = \lambda'\, I_2 + \mu' A. \tag{$\bigstar$}$$

Donc par idendif... Quoi ? ? ! ! Mais non. On écrit plutôt que

$$\lambda\, I_2 + \mu A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \tag{$\bigstar\bigstar$}$$

De même,

$$\lambda'\, I_2 + \mu' A = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu' \\ -\mu' & \lambda' \end{pmatrix}$$

Donc ($\bigstar$) est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu' \\ -\mu' & \lambda' \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda = \lambda' \\ \mu = \mu' \end{cases}$$

ce qui démontre l'unicité et nous pouvons conclure que

$$\boxed{\forall M \in \mathscr{E}, \quad \exists!\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \qquad M = \lambda I_2 + \mu A.}$$

IIB.2 Soient $M \in \mathscr{E}$ et $M' \in \mathscr{E}$, alors il existe $\left(\lambda, \mu, \lambda', \mu'\right) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$M = \lambda\, I_2 + \mu A \qquad \text{et} \qquad M' = \lambda'\, I_2 + \mu' A.$$

Donc

$$M + M' = \lambda\, I_2 + \mu A + \lambda'\, I_2 + \mu' A = \underbrace{(\lambda + \lambda')}_{=\lambda'' \in \mathbb{R}} I_2 + \underbrace{(\mu + \mu')}_{=\mu'' \in \mathbb{R}} A$$

et donc par définition de $\mathscr{E}$, $\boxed{M + M' \in \mathscr{E}}$.

Soient $M \in \mathscr{E}$ et $t \in \mathbb{R}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \lambda\, I_2 + \mu A$. Donc

$$tM = \underbrace{t\,\lambda}_{\in \mathbb{R}} I_2 + \underbrace{t\mu}_{\in \mathbb{R}} A.$$

Donc $\boxed{tM \in \mathscr{E}}$.

IIB.3 Directement, on a

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.}$$

IIB.4 Soit $(M, M') \in \mathscr{E}^2$. Il existe $\left(\lambda, \mu, \lambda', \mu'\right) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \lambda\, I_2 + \mu A$ et $M' = \lambda'\, I_2 + \mu' A$. Donc, en reproduisant les calculs de (★★), on obtient

$$\begin{aligned} MM' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda' & \mu' \\ -\mu' & \lambda' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda\,\lambda' - \mu\mu' & \lambda\,\mu' + \mu\,\lambda' \\ -\mu\,\lambda' - \lambda\,\mu' & -\mu\mu' + \lambda\,\lambda' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\,\lambda' - \mu\mu' & 0 \\ 0 & -\mu\mu' + \lambda\,\lambda' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda\,\mu' + \mu\,\lambda' \\ -\mu\,\lambda' - \lambda\,\mu' & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(\lambda\,\lambda' - \mu\mu')}_{=\lambda'' \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{(\lambda\,\mu' + \mu\,\lambda')}_{=\mu'' \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda''\, I_2 + \mu'' A. \end{aligned}$$

Suivant cette écriture, on conclut que $\boxed{MM' \in \mathscr{E}}$.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \mathbb{C} &\to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ z &\mapsto \mathrm{Re}(z) I_2 + \mathrm{Im}(z) A. \end{aligned}$$

IIB.5 Puisque $\mathrm{Re}(i) = 0$ et $\mathrm{Im}(i) = 1$, on a

$$\varphi(i) = 0 \times I_2 + 1 \times A = A.$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi(i)^2 = A^2 &= -I_2 && \text{d'après la question IIB.3.} \\ &= \varphi(-1) = \varphi\left(i^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi(i) = A \qquad \text{et} \qquad \varphi(i)^2 = \varphi\left(i^2\right).}$$

IIB.6 (a) Soient z et z' deux complexes tels que $\varphi(z) = \varphi(z')$. Alors

$$\mathrm{Re}(z) I_2 + \mathrm{Im}(z) A = \mathrm{Re}(z') I_2 + \mathrm{Im}(z') A.$$

Donc d'après la question IIB.1, on a unicité de l'écriture des éléments de $\mathscr{E}$ et donc

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = z'.$$

Nous avons donc montré que

$$\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \left(\varphi(z) = \varphi(z') \qquad \Rightarrow \qquad z = z'\right).}$$

(b) Soit $M \in \mathscr{E}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \lambda I_2 + \mu A$. Posons $z = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}(z) I_2 + \mathrm{Im}(z) A = \mathrm{Re}\,(\lambda + i\mu)\, I_2 + \mathrm{Im}\,(\lambda + i\mu) = \lambda\, I_2 + \mu A = M.$$

Nous avons trouver un complexe z dont l'image par φ donne M. Ainsi,

$$\boxed{\forall M \in \mathscr{E}, \quad \exists z \in \mathbb{C}, \qquad \varphi(z) = M.}$$

(c) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(z) + \varphi(z') &= \mathrm{Re}(z) I_2 + \mathrm{Im}(z) A + \mathrm{Re}(z') I_2 + \mathrm{Im}(z') A \\
&= (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z'))\, I_2 + (\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z'))\, A \\
&= (\mathrm{Re}(z + z'))\, I_2 + (\mathrm{Im}(z + z'))\, A \qquad \text{par linéarité des parties réelles et imaginaires.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(z) + \varphi(z') = \varphi(z + z').}$$

(d) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Posons $M = \varphi(z)$ et $M' = \varphi(z')$. Alors, de même que dans la question IIB.4 avec $\lambda = \mathrm{Re}(z)$, $\mu = \mathrm{Im}(z)$, $\lambda' = \mathrm{Re}(z')$ et $\mu' = \mathrm{Im}(z')$,

$$\varphi(z)\, \varphi(z') = MM' = (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z'))\, I_2 + (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z'))\, A.$$

Donc par la forme algébrique du produit de deux complexes, on a

$$\boxed{\varphi(z)\, \varphi(z') = \mathrm{Re}(zz') I_2 + \mathrm{Im}(zz') A = \varphi(zz').}$$

IIB.7 On pose $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple et l'on veut montrer que $M_0 \notin \mathscr{E}$. Procédons par l'absurde, supposons que $M_0 \in \mathscr{E}$. Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_0 = \lambda\, I_2 + \mu A$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = \lambda \\ 0 = \mu \\ 0 = -\mu \\ 0 = \lambda \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 = 0 \\ \mu = 0. \end{cases} \qquad \text{impossible.}$$

Le résultat étant impossible, on en déduit que $M_0 \notin \mathscr{E}$ et donc $\mathscr{E}$ n'est pas l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tout entier :

$$\boxed{\mathscr{E} \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,.}$$

Exercice III (Rechercher - facultatif)

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

III.1 A l'image de l'exercice recherché en classe, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (1+x)^n \end{cases}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{n+1} (1+x)^{n+1}\,. \tag{1}$$

De plus, par la formule du binôme de Newton, on a également

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

qui est un polynôme en x. Donc en intégrant cette égalité,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = C + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

Or d'après (1), on a $F(0) = \frac{1}{n+1}$. Donc

$$\frac{1}{n+1} = C + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{0^{k+1}}{k+1} = C.$$

Notez bien que ce résultat est valide car l'indice $k \geqslant 0$ et donc $0^{k+1} = 0$. Ce n'aurait pas été le cas si $k = 0$, $x^k = 1$ et ce même si $x = 0$. Donc $C = \frac{1}{n+1}$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$$

Evaluons maintenant F en -1 on obtient alors,

$$F(-1) = \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = 0 = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{n+1} + S_n.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{-1}{n+1}.}$$

III.2 Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$ la propriété $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Initialisation. Si $n = 1$, alors $T_1 = \sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^2}{1} = 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie c'est-à-dire $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrons alors $P(n+1)$. On a par définition de T_{n+1},

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Afin de faire ressortir T_n de cette somme, on désire utiliser la formule de Pascal $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ qui n'est vraie que pour $k \in [\![1;n]\!]$ (je vous rappelle que n a été fixé plus haut). On commence donc par extraire le terme $k = n+1$ dans la somme ci-dessus :

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}}_{=\frac{(-1)^n}{n+1}}.$$

Puis l'on applique comme annoncé la formule de Pascal :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}. \end{aligned}$$

On reconnaît alors dans la première somme T_n et dans la seconde une somme qui ressemble à S_n à un changement d'indice près. Posons $\tilde{k} = k - 1$ dans la seconde somme. On obtient alors

$$T_{n+1} = T_n + \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \binom{n}{\tilde{k}} \frac{(-1)^{\tilde{k}+2}}{\tilde{k}+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Notez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^{k+2} = -(-1)^{k+1}$. Ainsi

$$T_{n+1} = T_n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

On complète la somme par le terme $k = n$ pour faire apparaitre S_n :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \mathit{underbrace} \binom{n}{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}_{=0} \\ &= T_n - S_n. \end{aligned}$$

D'après la question précédente $S_n = -\frac{1}{n+1}$ et d'après l'hypothèse de récurrence $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi,

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Ce qui démontre $P(n+1)$.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$