Devoir Maison 4

A rendre pour le jeudi 29/11

Exercice I (Restituer)

I.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1|$.

I.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \binom{i}{j}$.

I.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}$.

I.4 (a) Simplifier $\sqrt{16+8\sqrt{3}}$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité suivante :

$$4\cos^2(x) + \left(2-2\sqrt{3}\right)\cos(x) - \sqrt{3} \leqslant 0.$$

Exercice II (S'entrainer)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \frac{\ln^n(x)}{n!x^2}$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie A : Etude des f_n.

IIA.1 Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_n$ de définition de f_n.

IIA.2 Déterminer proprement $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. Quelle conclusion graphique peut-on en déduire ?

IIA.3 Suivant les valeurs de n, déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$. Quelle conclusion graphique peut-on en déduire ?

IIA.4 Justifier que f_n est dérivable sur $\mathscr{D}_n$ et calculer pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f_n'(x)$.

IIA.5 En déduire proprement suivant les valeurs de $n \geqslant 1$, le tableau de variations de f_n.

Partie B : Détermination de la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

IIB.1 Justifier que I_n existe.

IIB.2 Démontrer que pour tout $t \in [1;\mathrm{e}]$ on a $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{n!}$.

IIB.3 En déduire un encadrement de I_n.

IIB.4 Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C : Une formule pour la constante d'Euler.

IIC.1 Calculer I_0.

IIC.2 A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}(n+1)!} + I_n.$$

IIC.3 Démontrer alors proprement que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!} + I_0.$$

IIC.4 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

IIC.5 On admet dans cette question que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-1}$. En calculant de deux façons la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2n}\left[\frac{1}{k!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right]$$

montrer que ch(1) est la limite d'une somme. *On pourra admettre le résultat suivant : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réelle telle que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$. *Alors* $\lim_{n\to+\infty}u_{2n}=\lim_{n\to+\infty}u_{2n+1}=l$.

Exercice III (S'entrainer)

Soit f la fonction définie par $f : x\mapsto \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.

III.1 Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f puis sans la dériver, montrer que f est bornée sur $\mathscr{D}_f$.

III.2 Etudier la parité de f.

III.3 Calculer les limites de f et préciser les éventuelles asymptotes.

III.4 Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

III.5 Montrer que f est bijective. On précisera l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

III.6 Soit $x\in\mathscr{D}_f$. On pose $u(x)=\mathrm{e}^x-1$ et $v(x)=\mathrm{e}^x+1$.

(a) Exprimer e^x en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.

(b) Démontrer que $f'(x)=\left(\frac{u(x)}{v(x)}+1\right)\frac{1}{v(x)}$.

(c) Exprimer 1 en fonction de $u(x)$ et $v(x)$.

(d) En déduire une expression de $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.

III.7 Sans calculer f^{-1}, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} puis, à l'aide de la question précédente, calculer $\left(f^{-1}\right)'$.

III.8 Donner la fonction f^{-1} explicitement.