Corrigé du Devoir Maison 7

Solution de l'exercice I

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right).$$
On note $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.

Partie A : Etude aux bornes

IA.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes.
$$x \in \mathscr{D}_f \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [-1;1] \\ x \geqslant 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases}$$
Or si $x \geqslant 0$, alors $x+1 \geqslant 1 > 0$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \geqslant 0$. Donc,
$$x \in \mathscr{D}_f \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2\sqrt{x} \leqslant 1+x \end{cases} \qquad \text{car } 1+x>0 \text{ pour tout } x \geqslant 0.$$
En utilisant l'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$ vraie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a = \sqrt{x}$ et $b = 1$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $2\sqrt{x} \leqslant 1+x$. Autre méthode, on pose $X = \sqrt{x}$ et l'on a alors $2X \leqslant 1+X^2 \;\Leftrightarrow\; X^2-2X+1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (X-1)^2 \geqslant 0$. La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $2\sqrt{x} \leqslant 1+x$. Finalement
$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+.}$$

IA.2 On a $f(0) = \arcsin(0) = 0$ et $f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Donc
$$\boxed{f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = \frac{\pi}{2}.}$$

IA.3 (a) On a pour tout $x > 0$, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + o(1)$. Par conséquent, en posant $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}(1+o(1)) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
Donc,
$$\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
Or, on sait que $\arcsin(v) \underset{v\to 0}{\sim} v$ et donc $\arcsin(v) \underset{v\to 0}{=} v + o(v)$. En posant $v = \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $o(v) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$. On en déduit donc que
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
Ainsi
$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}.}$$
On rappelle que la composition d'équivalents par une fonction à gauche est rigoureusement interdit ! Il faut donc bien passer par des développements limités.

(b) De équivalents ayant la même limite, on déduit de la question précédente que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.}$$

Ainsi $\boxed{\text{le graphe de la fonction } f \text{ admet une asymptote horizontale d'équation } y=0 \text{ en } +\infty.}$

IA.4 (a) Quand x tend vers 0, on a $\frac{1}{1+x} \underset{x\to0}{=} 1+o(1)$. Donc, $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \underset{x\to0}{=} 2\sqrt{x}+o(\sqrt{x})$. De plus $\arcsin(u) \underset{u\to0}{=} u+o(u)$. En posant $u=2\sqrt{x}$, on a bien $u \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $o(u) \underset{x\to0}{=} o(\sqrt{x})$. Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to0}{=} 2\sqrt{x}+o\left(\sqrt{x}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}.}$$

(b) Supposons que f admette un développement limité d'ordre 1 en 0. Alors il existe $(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x) \underset{x\to0}{=} a_0+a_1x+o(x).$$

Donc d'après la question précédente, $2\sqrt{x} \underset{x\to0}{=} a_0+a_1x+o(x)$. Si a_0 est non nul, alors $2\sqrt{x} \underset{x\to0}{\sim} a_0$ ce qui est absurde. Donc $a_0=0$. Puis, $2\sqrt{x} \underset{x\to0}{=} a_1x+o(x)$. Or on sait que $x \underset{x\to0}{\ll} \sqrt{x}$. Donc $2\sqrt{x} \underset{x\to0}{=} o(\sqrt{x})$ ce qui est absurde. $\boxed{\text{Conclusion, } f \text{ n'admet pas de développement limité d'ordre 1 en 0.}}$

(c) On sait d'après le cours que f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 si et seulement si f est dérivable en 0. Or d'après la question précédente, f n'admet pas de développement limité d'ordre 1 en 0. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$

(d) D'après la question IA.4a, on a $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{2}{\sqrt{x}} = +\infty.}$$

Le taux d'accroissement de f en 0 n'ayant pas une limite finie en 0, on en déduit à nouveau que $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$. Plus précisément,
$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ possède une tangente verticale d'équation } x=0 \text{ en } 0.}$

Partie B : Dérivée de f et g

IB.1 Soit $x\in\mathscr{D}_f=\mathbb{R}_+$. Cherchons dans un premier temps, les points qui peuvent poser problème. On a

$$x\in\mathscr{D}'_f \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\in]-1;1[\\ x>0\\ x+1\neq0\end{cases}.$$

Or pour $x>0$, $x+1\neq0$ et $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}>0$. D'où,

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\in]-1;1[\\ x>0\\ x+1\neq0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0\\ \frac{2\sqrt{x}}{x+1}<1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0\\ 2\sqrt{x}<x+1\end{cases} \quad \text{car pour tout } x>0,\ x+1>0.$$

Soit $x>0$. Posons $X=\sqrt{x}$. On a alors $2\sqrt{x}<x+1 \Leftrightarrow 2X<X^2+1 \Leftrightarrow X^2-2X+1=(X-1)^2>0 \Leftrightarrow X\neq1 \Leftrightarrow \sqrt{x}\neq1 \Leftrightarrow x\neq1$. On en déduit alors que

$$]0;1[\cup]1;+\infty[\subseteq\mathscr{D}'_f.$$

Attention dans le cas de la dérivabilité, il se peut qu'un problème *a priori* disparaisse. Exemple $x\mapsto|x|$ n'est pas dérivable en 0 mais $x\mapsto x|x|$ l'est. Ce n'est pas le cas ici, on admet que la fonction f n'est pas dérivable en 1 (ni en 0 cf questions précédentes). On conclut donc que $\mathscr{D}'_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$ ou encore que l'on sait que $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;1[\cup]1;+\infty[.}$

IB.2 Pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} &= \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(x+1)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}\,(x+1)} \frac{1}{\sqrt{1+2x+x^2-4x}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}\,(x+1)} \frac{1}{\sqrt{1-2x+x^2}}. \end{aligned}$$

On conclut que pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-x}{|1-x|\sqrt{x}\,(1+x)}.}$$

On pose également

$$g : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{x}\right).$$

IB.3 Par composition d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et en particulier sur }]0;1[\cup]1;+\infty[.}$

IB.4 Par la formule de la dérivée de la composée, on obtient,

$$\boxed{\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}} \qquad \text{car } x > 0.$$

Partie C : Simplification de f

IC.1 Pour tout $x \in]0;1[$, on a par la question IB.2,

$$f'(x) = \frac{1-x}{(1-x)\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

Donc d'après la question IB.4, pour tout $x \in]0;1[$,

$$f'(x) = 2g'(x).$$

Or $]0;1[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]0;1[$,

$$f(x) = 2g(x) + C_1 = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_1.$$

De la même façon, pour tout $x > 1$, par la question IB.2 puis IB.4,

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x-1)\sqrt{x}(1+x)} = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+x)} = -2g'(x).$$

Or $]1;+\infty[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Donc il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = -2g(x) + C_2 = -2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_2.$$

Conclusion :

$$\boxed{\exists\,(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_1 & \text{si } x \in]0;1[\\ -2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_2 & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}}$$

IC.2 La fonction f est continue sur son ensemble de définition comme quotient et composée de fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Donc f en 0 est continue et

$$0 = f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_1 = C_1.$$

Donc $\boxed{C_1 = 0}$. Autre méthode, on regarde en 1, cela nous permet aussi de calculer C_2 :

$$\frac{\pi}{2} = f(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_1 = 2\arctan(1) + C_1 = \frac{\pi}{2} + C_1.$$

et donc on retrouve $C_1 = 0$. Puis,

$$\frac{\pi}{2} = f(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} -2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C_2 = -2\arctan(1) + C_2 = -\frac{\pi}{2} + C_1.$$

Donc $\boxed{C_2 = \pi}$. Conclusion

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \in [0;1] \\ \pi - 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \in [1;+\infty[\end{cases}}$$

Exercice II (S'entrainer)

Le but de ce problème est de donner plusieurs méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction tangente en 0.

Partie A : Préliminaires

IIA.1 La fonction tangente est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction tangente est $\mathscr{C}^n$ en 0 et d'après le cours admet donc un développement limité à l'ordre n en 0. En particulier pour $n = 5$,

$\boxed{\text{la fonction tangente étant } \mathscr{C}^5 \text{ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.}}$

IIA.2 Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de la fonction tangente i.e.

$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

(a) On sait que la fonction tangente est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le cours, on sait que **en** 0 son développement limité n'admet que des monômes de degré impair. Par conséquent,

$$\boxed{a_0 = a_2 = a_4 = 0.}$$

(b) Comme la fonction tangente est dérivable, par la formule de Taylor-Young et l'unicité des coefficients d'un développement limité, on sait que

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = f'(0) = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1.$$

D'où $\boxed{a_1 = 1}$.

Partie B : Méthode 1 : comme réciproque de l'arctangente

IIB.1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) D'après le cours, on sait que

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o\left(u^n\right) \underset{u \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + o\left(u^n\right).$$

Donc en posant $u = x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right).}$$

(b) On sait que la fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Donc par la question précédente et l'intégration des développements limités, on en déduit que

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).\end{aligned}$$

Comme $\arctan(0) = 0$,

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

Observez que l'on a que des monômes de degré impair, ce qui est normal car la fonction arctan *est impaire sur* $\mathbb{R}$.

(c) En particulier si $n = 2$, on déduit de la question précédente que

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).}$$

IIB.2 D'après la question IIA.2, on sait que

$$\tan(u) \underset{u\to 0}{=} a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o\left(u^5\right) \underset{u\to 0}{=} u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o\left(u^5\right)$$

Posons $u = \arctan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}u &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right). \\ u^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(xu\right) - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right) \\ &= x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right) \\ u^3 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\ &= x^3 - \frac{2x^5}{3} + o\left(x^5\right) - \frac{x^5}{3} + o\left(x^5\right) \\ &= x^3 - x^5 + o\left(x^5\right) \\ u^5 &= u^2u^3 = \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^3 - x^5 + o\left(x^5\right)\right) \\ &= x^5 + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} x \quad & - \frac{x^3}{3} && + \frac{x^5}{5} && + o\left(x^5\right) \\ & + a_3 x^3 && - a_3 x^5 && + o\left(x^5\right) \\ & && + a_5 x^5 && + o\left(x^5\right) \\ \underset{x\to 0}{=} x \quad & + \left(a_3 - \frac{1}{3}\right) x^3 && + \left(\frac{1}{5} - a_3 + a_5\right) x^5 && + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\arctan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} x + \left(a_3 - \frac{1}{3}\right) x^3 + \left(\frac{1}{5} - a_3 + a_5\right) x^5 + o\left(x^5\right).}$$

IIB.3 D'après la définition de la fonction arctan qui est la réciproque de la **restriction** de la fonction tangente à l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc on sait que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x}$.

Attention l'inverse est faux ! $\arctan(\tan(x)) \neq x$ *en général.*

IIB.4 Des deux questions précédentes, on en déduit que

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \left(a_3 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + o\left(x^5\right).$$

Donc par unicité des coefficient d'un développement limité, on a nécessairement

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ a_3 - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{1}{5} - a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_3 = \frac{1}{3} \\ a_5 = a_3 - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

Conclusion, $\boxed{a_3 = \dfrac{1}{3}}$, $\boxed{a_5 = \dfrac{2}{15}}$ et

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Partie C : Méthode 2 : comme quotient du sinus sur cosinus

IIC.1 D'après le cours, on sait que

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\ \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right). \end{aligned}}$$

IIC.2 De la question précédente, on obtient

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)}$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$. Donc en posant $u \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\begin{aligned} u &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \\ u^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right) \\ u^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\left(\frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right) \\ o\left(u^3\right) &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{array}{rlllll} \frac{1}{1+u} & \underset{x\to 0}{=} 1 & +\frac{x^2}{2} & -\frac{x^4}{24} & +o\left(x^5\right) \\ & & & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^5\right) \\ & & & & +o\left(x^5\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} 1 & +\frac{x^2}{2} & +\frac{5x^4}{24} & +o\left(x^5\right) \end{array}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} + o\left(x^5\right) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + o\left(x^5\right) + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la partie B,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Partie D : Méthode 3 : à l'aide de sa dérivée

IID.1 On rappelle que l'on avait trouvé à la question IIA.2b que $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$. Donc

$$1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + (x + o(x))^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + 2xo(x) + o(x)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right).}$$

IID.2 Par intégration des développements limités, on déduit de la question précédente que

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Donc

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).}$$

IID.3 Donc en prenant ce nouveau développement limité de la fonction tangente, on trouve

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)\left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right) + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Alors par intégration des développements limités,

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).$$

Finalement, pour la troisième fois, on retrouve toujours le même résultat,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Exercice III (S'entrainer)

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{llll}
u_{n+1} & = & 3v_n & -2w_n \\
v_{n+1} & = -u_n & +3v_n & -w_n \\
w_{n+1} & = 2u_n & -3v_n & +4w_n
\end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le vecteur colonne dont les trois coordonnées sont respectivement u_n, v_n et w_n.

III.1 On pose $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_n - 2w_n \\ -u_n + 3v_n - w_n \\ 2u_n - 3v_n + 4w_n \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

III.2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $X_n = M^n X_0$ ». Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation.* Si $n = 0$, alors par définition, $M^0 = I_3$. Donc $M^0 X_0 = X_0$ et $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse $X_n = M^n X_0$ et par la question précédente, $X_{n+1} = MX_n$. Donc
$$X_{n+1} = MX_n = MM^n X_0 = M^{n+1} X_0$$
et $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
- *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc montré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

III.3 On a
$$A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1.$$

La matrice obtenue est échelonnée avec un seul pivot. Donc $\boxed{\operatorname{rg}(A) = 1}$. Ainsi $\operatorname{rg}(A) \neq 3$ et donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

III.4 On souhaite calculer les puissances de A. Commençons par calculer A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Donc pour tout $n \geqslant 2$, $A^n = A^2 A^{n-2} = 0_3 A^{n-2} = 0_3$. Ainsi, $\boxed{A_0 = I_3,\ A^1 = A \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ A^k = 0_3}$.

III.5 Echelonnons P par opérations élémentaires. Puisque l'on aura également P^{-1} à déterminer, on applique simultanément les mêmes opérations à I_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

La matrice P est alors équivalente à une matrice échelonnée en ligne avec trois pivots. Donc $\mathrm{rg}(P) = 3$ et $\boxed{P \text{ est une matrice inversible}}$. De plus,

$$\begin{array}{llll}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow -L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow -L_3
\end{array}$$

Ce n'est pas obligatoire mais vérifions que la matrice obtenue est bien l'inverse de P. On a

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tout va bien, on conclut donc que l'inverse de P est donnée par

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

III.6 Un simple calcul montre que

$$\boxed{B = M - A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.}$$

Puis,

$$D = P^{-1}BP = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Et donc,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

III.7 Grâce à la question précédente, par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}.}$$

De plus $D = P^{-1}BP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}BP^{-1}P = I_3BI_3 = B$. Donc, toujours par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = \left(P^{-1}DP\right)^k = P^{-1}D^kP$. En effet,

- *Initialisation.* Si $k = 0$, $B^0 = I_3$ et $P^{-1}D^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3 = B^0$. Donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.
- *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $B^k = P^{-1}D^kP$. Alors $B^{k+1} = B^kB = PD^kP^{-1}$ par hypothèse de récurrence. Donc $B^{k+1} = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$. Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^{k+1} & -3 \times 2^k & 2^k \\ 2^k & 0 & 2^k \\ 3^k & -3^k & 3^k \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k+1} & -3\times 2^k & 2^k \\ 2^k & 0 & 2^k \\ 3^k & -3^k & 3^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{k+1}+2^{k+1}-3^{k+1} & -3\times 2^k+3^{k+1} & 2^k+2^{k+1}-3^{k+1} \\ 2^k-3^k & 3^k & 2^k-3^k \\ -2^{k+1}-2^k+3^{k+1} & 3\times 2^k-3^{k+1} & -2^k-2^k+3^{k+1} \end{pmatrix}$$
$$\boxed{B^k = \begin{pmatrix} 2^{k+2}-3^{k+1} & -3\times 2^k+3^{k+1} & 3\times 2^k-3^{k+1} \\ 2^k-3^k & 3^k & 2^k-3^k \\ -3\times 2^k+3^{k+1} & 3\times 2^k-3^{k+1} & -2^{k+1}+3^{k+1} \end{pmatrix}.}$$

III.8 On a d'une part,

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $BA = AB$ et les matrices A et B commutent. Par conséquent il est possible d'appliquer la formule de Newton.

III.9 On sait que $B = M - A$ et donc $M = A + B$. Or on a vu à la question précédente que l'on pouvait appliquer la formule de binôme de Newton à ces deux dernières matrices. on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$M^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = B^n + nAB^{n-1} + A^2 \left(\sum_{k=2} n \binom{n}{k} A^{k-2} B^{n-k} \right)$$

D'après la question III.4, on sait que $A^2 = 0_3$. Donc

$$M^n = B^n + nAB^{n-1}.$$

En utilisant les calculs précédents, $\forall n \geqslant 1$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3^{n+1} & -3\times 2^n+3^{n+1} & 3\times 2^n-3^{n+1} \\ 2^n-3^n & 3^n & 2^n-3^n \\ -3\times 2^n+3^{n+1} & 3\times 2^n-3^{n+1} & -2^{n+1}+3^{n+1} \end{pmatrix}$$
$$+ n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & -3\times 2^{n-1}+3^n & 3\times 2^{n-1}-3^n \\ 2^{n-1}-3^{n-1} & 3^{n-1} & 2^{n-1}-3^{n-1} \\ -3\times 2^{n-1}+3^n & 3\times 2^{n-1}-3^n & -2^n+3^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3^{n+1} & -3\times 2^n+3^{n+1} & 3\times 2^n-3^{n+1} \\ 2^n-3^n & 3^n & 2^n-3^n \\ -3\times 2^n+3^{n+1} & 3\times 2^n-3^{n+1} & -2^{n+1}+3^{n+1} \end{pmatrix}$$
$$+ n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Notons que la formule reste vraie si $n = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} (8+n)\,2^{n-1}-3^{n+1} & -3\times 2^n+3^{n+1} & (6+n)\,2^{n-1}-3^{n+1} \\ 2^n-3^n & 3^n & 2^n-3^n \\ -(6+n)\,2^{n-1}+3^{n+1} & 3\times 2^n-3^{n+1} & -(4+n)\,2^{n-1}+3^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

III.10 Notons que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, à l'aide de la question précédente et de la question III.2, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n = M^n X_0 &= \begin{pmatrix} (8+n)\,2^{n-1} - 3^{n+1} & -3 \times 2^n + 3^{n+1} & (6+n)\,2^{n-1} - 3^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 3^n & 2^n - 3^n \\ -(6+n)\,2^{n-1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^n - 3^{n+1} & -(4+n)\,2^{n-1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (8+2n)\,2^{n-1} - 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3^n \\ -(4n+2)\,2^{n-1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4+n)\,2^n - 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 3^n \\ -(2n+1)\,2^n + 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = (4+n)\,2^n - 3^{n+1} \\ v_n = 2^{n+1} - 3^n \\ w_n = -(2n+1)\,2^n + 3^{n+1} \end{cases}}$$

III.11 En particulier, si $n = 0$, on retrouve bien

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = 4 \times 1 - 3 = 1 \\ v_0 = 2 - 1 = 1 \\ w_0 = -2 + 3 = 1 \end{cases}}$$

De plus si $n = 1$,

$$\boxed{\begin{cases} u_1 = 5 \times 2 - 9 = 1 \\ v_1 = 4 - 3 = 1 \\ w_1 = -3 \times 2 + 9 = 3 \end{cases}}$$

Vérifions, que cela coïncide bien avec la définition des suites :

$$\begin{cases} u_1 & = & & 3v_0 & -2w_0 & = 3 - 2 & = 1 \\ v_1 & = & -u_0 & +3v_0 & -w_0 & = -1 + 3 - 1 & = 1 \\ w_1 & = & 2u_0 & -3v_0 & +4w_0 & = 2 - 3 + 4 & = 3 \end{cases}$$

Exercice IV (Rechercher (facultatif))

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On définit Φ par

$$\Phi : \quad \begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(F) \\ A &\mapsto f(A). \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que f est injective sur E. Montrons alors que Φ est injective sur $\mathscr{P}(E)$. Soient A et $B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties de E telles que

$$\Phi(A) = \Phi(B).$$

Par définition, on a donc $f(A) = f(B)$. Montrons alors que $A = B$. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A) = f(B)$. Donc il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$. Or f est injective, donc $x = b$. Dès lors, $x = b \in B$. Donc tout élément de A appartient à B et $A \subseteq B$. Par symétrie des hypothèses sur A et sur B, on en déduit exactement de la même façon que $B \subseteq A$ et donc $A = B$. On a donc montré que

$$\Phi(A) = \Phi(B) \qquad \Rightarrow \qquad A = B,$$

i.e. Φ est injective.
Réciproquement supposons maintenant que Φ est injective et démontrons que f est injective. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Posons

$$A = \{x\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x\}.$$

Puisque $f(x) = f(y)$ alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$.
Attention ces objets ne sont pas les mêmes : $f(x)$ est un ELEMENT de F tandis que $f(\{x\})$ est un ENSEMBLE de F.
En effet pour tout $z \in f(\{x\})$, il existe $u \in \{x\}$ tel que $z = f(u)$. Or le seul élément de $\{x\}$ est x donc $u = x$ et $z = f(x)$. Ainsi $f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(y)\} = f(\{y\})$. Donc $f(A) = f(B)$. Par définition de Φ, on en déduit que $\Phi(A) = \Phi(B)$. Or on a supposé Φ injective, donc $A = B$, donc $\{x\} = \{y\}$ et ainsi $x = y$. Conclusion, f est injective.
On a donc montré que

$$\boxed{f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \text{ est injective}}$$