Corrigé du Devoir Maison 8

Solution de l'exercice I

Soit

$$f : \quad]1;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(x^2-1\right)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Pour connaitre le comportement de f en $+\infty$ on a besoin d'un développement limité d'ordre $o\left(\frac{1}{x}\right)$ de $f(x)$ et donc on effectue un développement limité à l'ordre $\frac{1}{x^3}$. Pour tout $x>1$, on a

$$f(x)=\left(x^2-1\right)\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=\left(x^2-1\right)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right).$$

Or on sait que $\ln(1+u)\underset{u\to0}{=}u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o\left(u^3\right)$. Donc en prenant d'une part $u=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et d'autre part $u=-\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on trouve

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} \left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2(-x)^2}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \left(x^2-1\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 2x-\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} 2x-\frac{8}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=0$. Donc la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y=2x$. De plus,

$$f(x)-2x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{8}{3x},$$

et pour tout $x>0$, $-\frac{8}{3x}<0$. Donc il existe $x_0>0$ tel que pour tout $x>x_0$, $f(x)-2x<0 \iff f(x)<2x$. Ainsi au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f est en dessous de la droite d'équation $y=2x$.

> Conclusion : la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y=2x$ en $+\infty$ et se trouve sous son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Solution de l'exercice II

On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f_n(x)=x^n-x-1.$$

II.1 (a) Soit $n\geqslant 2$. La fonction f_n est définie et même dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que fonction polynomiale. De plus

$$\forall x\geqslant 1,\quad f_n'(x)=nx^{n-1}-1.$$

Donc, pour $x>1$,

$$f_n'(x)>0 \qquad\iff\qquad nx^{n-1}>1 \qquad\iff\qquad x^{n-1}>\frac{1}{n} \qquad\qquad \textit{car } n>0.$$

Or si $x>1$ et $n\geqslant 2$, $n-1\geqslant 1$ donc $x^{n-1}\geqslant x>1>\frac{1}{n}$. Par conséquent, pour tout $x>1$, $f_n'(x)>0$. Donc la fonction f_n est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Or $f_n(1)=1-1-1=-1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$. Ainsi :

x	1		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc montré que f_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et que $f_n(1) = -1 < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc par le corollaire de théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, \text{ il existe un unique } u_n \in [1;+\infty[\text{ tel que } f_n(u_n) = 0}$.

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$f_n(2) = 2^n - 3 \geqslant 2^2 - 3 = 1 > 0 = f_n(u_n) > -1 = f_n(1).$$

Or $u_n \in [1;+\infty[$ et f_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$1 < u_n < 2.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est bornée}}$.

II.2 (a) Soit $n \geqslant 2$. Puisque $f_n(u_n) = 0$, on sait que $u_n^n - u_n - 1 = 0 \Leftrightarrow u_n^n = u_n + 1$. Donc

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} - u_n - 1 = u_n \times u_n^n - u_n - 1 = u_n(u_n + 1) - u_n - 1 = u_n^2 - 1.$$

Or on a vu à la question précédente que $u_n > 1$ donc $u_n^2 - 1 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad f_{n+1}(u_n) > 0.}$$

(b) Par la question précédente, on a pour tout $n \geqslant 2$, $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ (par définition de u_{n+1}). Or on a vu à la question 1 que f_{n+1} est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et par définition, on a $u_n \in [1;+\infty[$ et $u_{n+1} \in [1;+\infty[$. On en déduit donc que

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n > u_{n+1}.$$

Autrement dit $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement croissante}}$.

II.3 (a) D'après la question II.2.(b) la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante et d'après la question II.1.(b), elle est également bornée donc majorée. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge}}$. On note ℓ sa limite.

(b) On a vu dans la question II.1.(b)

$$\forall n \geqslant 2, \quad 1 < u_n < 2.$$

Donc par passage à la limite,

$$\boxed{1 \leqslant \ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2.}$$

(c) Soit $n \geqslant 3$, par formule de Newton,

$$\begin{aligned}
f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} - 2 - \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - 2 - \frac{1}{n} \\
&= \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - 2 - \frac{1}{n} \qquad \textit{car } n \geqslant 3
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) &= 1+1+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-2-\frac{1}{n}\\
&= \frac{(n-1)n}{2}\frac{1}{n^2}+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{n}\\
&= \frac{n-1}{2n}-\frac{1}{n}+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\
&= \frac{n-3}{2n}+\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\\
&\geqslant \sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \qquad\qquad \textit{car } n\geqslant 3\\
&> 0
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\geqslant 3,\quad f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.}$$

(d) De la question précédente, on obtient pour tout $n\geqslant 3$, $f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)>0=f_n\left(u_n\right)$. Or on sait grâce à la question II.1.(a) que f_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. D'où

$$\forall n\geqslant 3,\quad u_n<1+\frac{1}{n}$$

Donc par passage à la limite quand $n\to+\infty$,

$$\ell\leqslant 1.$$

Or on a également vu à la question II.3.(b) que $l\geqslant 1$. On peut donc conclure que $\boxed{\ell=1}$.

II.4 On pose pour tout $n\geqslant 2$, $\alpha_n=u_n-\ell$.

(a) On a vu à la question II.1.(b) que pour tout $n\geqslant 2$, $u_n>1$. On en déduit donc directement que

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\quad \alpha_n>0.}$$

(b) On sait d'après la question II.3 que $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$. Par continuité de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+u_n\right)=\ln\left(2\right)\neq 0$. Autrement dit,

$$\boxed{\ln\left(1+u_n\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(2).}$$

(c) Par définition des α_n, on a pour tout $n\geqslant 2$, $u_n=\ell+\alpha_n=1+\alpha_n$. Donc

$$\forall n\geqslant 2,\quad n\ln\left(u_n\right)=n\ln\left(1+\alpha_n\right).$$

Or on sait que $\ln\left(1+u\right)\underset{u\to 0}{=}u+o\left(u\right)$. De plus par la question II.3, $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-1\right)=0$. Donc en posant $u=\alpha_n$, on a

$$n\ln\left(u_n\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\left(\alpha_n+o\left(\alpha_n\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}n\alpha_n+o\left(n\alpha_n\right).$$

$\boxed{\text{Pour passer aux équivalents, il faut justifier que le terme prépondérant est non nul.}}$

Puisque pour tout $n\geqslant 2$, $\alpha_n>0$ d'après la question II.4.(a) c'est bien le cas. Donc

$$\boxed{n\ln\left(u_n\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\alpha_n.}$$

NB : dans ce cas très particulier, cette précaution est en réalité superflue car si $\alpha_n=0$ alors on a bien $n\ln\left(u_n\right)=0$ simultanément.

(d) Soit $n \geqslant 2$. Par définition de u_n,

$$f_n(u_n) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n^n = u_n + 1.$$

Or on a vu que $u_n > 1 > 0$. Donc par composition par le logarithme, on obtient que

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad n \ln(u_n) = \ln(1 + u_n).}$$

(e) De cette dernière égalité et des équivalents précédemment déterminés, on en déduit que

$$n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln(u_n) = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2).$$

Autrement dit

$$\boxed{\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}.}$$

ou encore $\alpha_n = \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par définition de α_n, on en déduit alors que

$$\boxed{u_n = 1 + \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

II.5 On suppose que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

D'après les questions précédentes et par unicité d'un développement limité on sait que $\ell = 1$ et $a = \ln(2)$. Donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or nous avons montré que pour tout $n \geqslant 2$,

$$n \ln(u_n) = \ln(1+u_n).$$

D'où l'égalité suivante

$$n \ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(2 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right). \tag{1}$$

D'une part, en posant $u = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\begin{aligned}
u &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
u^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(2)}{n^2} + \frac{2b\ln(2)}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
u^3 = u \times u^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^3(2)}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
o\left(u^3\right) &\underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Donc par la formule $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 + \tfrac{\ln(2)}{n} + \tfrac{b}{n^2} + \tfrac{c}{n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \tfrac{\ln(2)}{n} + \tfrac{b}{n^2} + \tfrac{c}{n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\\
&\qquad - \tfrac{\ln^2(2)}{2n^2} - \tfrac{2b\ln(2)}{2n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\\
&\qquad + \tfrac{\ln^3(2)}{3n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\\
&\qquad + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \tfrac{\ln(2)}{n} + \tfrac{2b-\ln^2(2)}{2n^2} + \tfrac{3c-3b\ln(2)+\ln^3(2)}{3n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$n\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+\frac{2b-\ln^2(2)}{2n}+\frac{3c-3b\ln(2)+\ln^3(2)}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\qquad(2)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\ln\left(2+\frac{\ln(2)}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{b}{2n^2}+\frac{c}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{b}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Donc en posant $v=\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{b}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a

$$\begin{aligned}v&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{b}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\v^2&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\ln^2(2)}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\o\left(v^2\right)&\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Donc par la formule $\ln(1+v)\underset{v\to0}{=}v-\frac{v^2}{2}+o\left(v^3\right)$, on obtient que

$$\begin{aligned}\ln\left(2+\frac{\ln(2)}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{b}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\ln^2(2)}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{4b-\ln^2(2)}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\qquad(3)\end{aligned}$$

En regroupant (1), (2) et (3), on trouve

$$\ln(2)+\frac{2b-\ln^2(2)}{2n}+\frac{3c-3b\ln(2)+\ln^3(2)}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\ln(2)+\frac{\ln(2)}{2n}+\frac{4b-\ln^2(2)}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par unicité du développement limité, cela implique que

$$\begin{cases}\ln(2)&=\ln(2)\\\frac{2b-\ln^2(2)}{2}&=\frac{\ln(2)}{2}\\\frac{3c-3b\ln(2)+\ln^3(2)}{3}&=\frac{4b-\ln^2(2)}{8}\end{cases}\iff\begin{cases}b&=\frac{\ln(2)+\ln^2(2)}{2}\\c&=\frac{4b-\ln^2(2)}{8}+\frac{3b\ln(2)-\ln^3(2)}{3}=\frac{12b+24b\ln(2)-3\ln^2(2)-8\ln^2(2)}{24}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}b&=\frac{\ln(2)+\ln^2(2)}{2}\\c&=\frac{6\ln(2)+6\ln^2(2)+12\ln^2(2)+\ln^3(2)-11\ln^2(2)}{24}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}b&=\frac{\ln(2)+\ln^2(2)}{2}\\c&=\frac{6\ln(2)+7\ln^2(2)+\ln^3(2)}{24}\end{cases}$$

Conclusion, on a trouvé

$$\boxed{a=\ln(2)\qquad b=\frac{\ln(2)+\ln^2(2)}{2}\qquad\text{et}\qquad c=\frac{6\ln(2)+7\ln^2(2)+\ln^3(2)}{24}.}$$

Exercice III (S'entrainer)

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln(x)}{4},$$

puis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Partie A : Etude de f

IIIA.1 On sait par croissance comparée que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \ln(x) = 0$. Ainsi f admet une limite finie en 0 qui est

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = \frac{1}{4}}$.

IIIA.2 La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions usuelles $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{-1 - 4x\ln(x) - \frac{2x^2}{x}}{4} = -\frac{1 + 2x + 4x\ln(x)}{4}.$$

Etude en 0. Par croissance comparée, on constate que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = -\frac{1}{4}.$$

Donc

(i) f est continue sur $[0;+\infty[$,

(ii) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$,

(iii) sa dérivée admet une limite finie en 0^+.

Donc d'après le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et

$$f'(0) = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

IIIA.3 *Méthode 1 par le taux d'accroissement.* Puisque l'on sait déjà que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que$f$ est deux fois dérivable si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \qquad \text{existe dans } \mathbb{R}.$$

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{1+2x+4x\ln(x)}{4} + \frac{1}{4}}{x} = -\frac{2x + 4x\ln(x)}{4x} = -\frac{2 + 4\ln(x)}{4} = -\frac{1}{2} - \ln(x).$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Donc f' n'est pas dérivable en 0 (et admet même une tangente verticale en ce point) i.e. f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Méthode 2 par le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Posons $g = f'$ sur $[0;+\infty[$. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \left(-\frac{1 + 2x + 4x\ln(x)}{4}.\right)' = -\frac{2 + 4\ln(x) + 4}{4} = -\frac{3}{2} - \ln(x).$$

On constate que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = +\infty.$$
On en déduit directement (proposition III.18 chapitre 14) que g n'est pas dérivable en 0 (et même admet une tangente verticale en ce point) i.e. f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Conclusion $\boxed{f \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0.}$

IIIA.4 Avec les notations de la question précédente, on a vu que pour tout $x > 0$,
$$f''(x) = g'(x) = -\frac{3}{2} - \ln(x).$$
Soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes :
$$f''(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x) < -\frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x < \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \qquad \textit{par stricte croissance de la fonction exponentielle.}$$
Donc f' est strictement croissante sur $\left]0; \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right[$ et de même strictement décroissante sur $\left]\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}; +\infty\right[$. De plus, on a vu que $f'(0) = -\frac{1}{4}$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -\frac{1+2x+4x\ln(x)}{4}$. Donc
$$f'\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right) = -\frac{1 + 2\,\mathrm{e}^{-3/2} + 4\,\mathrm{e}^{-3/2}\left(\frac{3}{2}\right)}{4} = -\frac{1 + 8\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4}.$$
et
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty.$$
Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{1+8\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

On observe alors que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant -\frac{1+8\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4} < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et notamment sur $[0; 1]$. Or, on a posé $f(0) = \frac{1}{4}$ et on a $f(1) = \frac{1-1+2\ln(1)}{4} = 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

IIIA.5 Par décroissance de la fonction f sur $[0; 1]$, on a
$$\forall x \in [0; 1], \qquad f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{4} \geqslant f(x) \geqslant 0$$
En particulier,
$$\forall x \in [0; 1], \qquad f(x) \in [0; 1].$$
d'autre part, on a
$$f'(1) = -\frac{1 + 2 + 4\ln(1)}{4} = -\frac{3}{4}.$$
Du tableau de variation de f' de la question précédente on en déduit le suivant :

x	0	$\mathrm{e}^{-3/2}$	1
f'	$-\frac{1}{4}$ ↗	$-\frac{1+8\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4}$	↘ $-\frac{3}{4}$

Ainsi,

$$\forall x \in [0;1], \qquad \min\left(-\frac{1}{4}\,;\,-\frac{3}{4}\right) \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1+8\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4} < 0$$

Donc

$$\forall x \in [0;1], \qquad |f'(x)| = -f'(x) \leqslant \left|\min\left(-\frac{1}{4}\,;\,-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}.$$

Conclusion, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \qquad f(x) \in [0;1] \qquad \text{et} \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}.}$$

IIIA.6 Posons pour tout $x \in [0;1]$,

$$h(x) = f(x) - x.$$

On a vu que f est strictement décroissante sur $[0;1]$. Puisque $x \mapsto -x$ est aussi strictement décroissante sur $[0;1]$, on en déduit que h est aussi strictement décroissante sur $[0;1]$ comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. De plus h est continue sur $[0;1]$ et $h(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{4} > 0$ et $h(1) = 0 - 1 < 0$. Donc d'après le corollaire du théorème de la bijection, il existe un unique réel $\ell \in]0;1[$ tel que $h(\ell)$ i.e.

$$\boxed{\text{il existe un unique réel } \ell \in]0;1[\text{ tel que } f(\ell) = \ell.}$$

Partie B : Limite de la suite

IIIB.1 On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in [0;1]$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Initialisation. Si $n = 0$, alors par définition, u_0 existe et $u_0 = 0 \in [0;1]$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors u_n existe et $u_n \in [0;1]$. Or f est définie sur $[0;1]$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus on a vu dans la question IIIA.5 que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$. Par conséquent, on a aussi $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \in [0;1]}$.

IIIB.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de u_{n+1} et puisque ℓ est un point fixe de f, on a

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|.$$

Or f est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et donc sur $[u_n;\ell]$ ou $[\ell;u_n]$ car on a vu précédemment que $u_n \in [0;1]$ et $\ell \in [0;1]$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \sup_{z \in [u_n;\ell]} |f'(z)|\,|u_n - \ell| \leqslant \sup_{z \in [0;1]} |f'(z)|\,|u_n - \ell|$$

car $[u_n;\ell] \subseteq [0;1]$ (ou $[\ell;u_n] \subseteq [0;1]$). Or on a vu à la question IIIA.5 que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$. D'où

$$\sup_{z \in [0;1]} |f'(z)| \leqslant \frac{3}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4}\,|u_n - \ell|\,.}$$

IIIB.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Initialisation. Si $n = 0$ alors

$$|u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^0 |u_0 - \ell|.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e.

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Alors de la question précédente, on en déduit que

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \ell| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Or $\frac{3}{4} \in [0;1]$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement des suites, on a

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Conclusion, $\boxed{\text{on a montré que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et que sa limite est } \ell}$.

IIIB.4 On a vu dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Or $u_0 = 0$ et $\ell \in [0;1]$ donc $|u_0 - \ell| = |\ell| \leqslant 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On en déduit une majoration de l'erreur. Soit $r > 0$,

$$|u_n - \ell| \leqslant r \quad \Leftarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant r,$$

i.e. $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant r$ est une condition suffisante pour que u_n soit proche de ℓ à r-près. Or

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant r \qquad \Leftrightarrow \qquad n\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant \ln(r) \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geqslant \frac{\ln(r)}{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)}.$$

Donc en prenant $n \geqslant \left\lfloor \frac{\ln(r)}{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \right\rfloor$, on sait que $\ell \in [\ell - r; \ell + r]$. Voici donc un exemple de programme Python retournant le valeur approchée de ℓ à une précision de r :

```python
import numpy as np

def mafonction(x):
    if x==0:
        y=1/4
    else:
        y=(1-x-2*x**2*np.log(x))/4
    return y

def DM8(r):
    n=int(np.log(r)/np.log(3/4))
    u=0
    for i in range(n):
        u=mafonction(u)
    return u
```

On obtient notamment pour $r = 10^{-5}$,

$$0,23134 - 10^{-5} \leqslant \ell \leqslant 0,23134 + 10^{-5}.$$

Partie C : Un peu d'adjacence

On n'utilisera pas dans cette partie les résultats de la Partie B.
On pose la fonction $g : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0;1[$ par $g(x) = f \circ f(x)$. On pose également les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{2n} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{2n+1}.$$

IIIC.1 La fonction f est bien définie sur $[0;1[$ d'après la question IIIA.1. De plus, on a vu dans la question IIIA.5 que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$, notamment, pour tout $x \in [0;1[$, $f(x) \in \mathbb{R}_+$ et f étant bien définie sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $f\left(f(x)\right)$ qui existe. Conclusion, $\boxed{g \text{ est bien définie sur } [0;1[}$.

IIIC.2 Puisque f est strictement décroissante sur $[0;1]$ (question IIIA.4) et que $f\left([0;1[\right) \subseteq [0;1]$, on en déduit que $g = f \circ f$ est de monotonie opposée à celle de f i.e. est strictement croissante sur $[0;1[$. Démontrons-le. Soit $(x,y) \in [0;1[^2$ on a par stricte décroissance de f les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x < y \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > f(y) && \textit{car } (x,y) \in [0;1]^2 \textit{ et } f \textit{ strictement décroissante sur } [0;1]\\
&\Leftrightarrow \quad f\left(f(x)\right) < f\left(f(y)\right) && \textit{car } \left(f(x), f(y)\right) \in [0;1] \textit{ et } f \textit{ strictement décroissante sur } [0;1]\\
&\Leftrightarrow \quad g(x) < g(y).
\end{aligned}$$

Donc par définition, $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [0;1[}$.

IIIC.3 Par définition des différentes suites, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f\left(u_{2n+1}\right) = f\left(f\left(u_{2n}\right)\right) = g\left(u_{2n}\right) = g\left(v_n\right).$$

de même

$$w_{n+1} = u_{2n+3} = g\left(u_{2n+1}\right) = g\left(w_n\right).$$

Puisque g est strictement croissante, on démontre par récurrence que
$\boxed{\text{les suites } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont monotones.}}$

IIIC.4 On a $v_0 = u_0 = 0$ et

$$v_1 = u_2 = f\left(f\left(u_0\right)\right) = f\left(f\left(0\right)\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 - \frac{1}{4} - 2\frac{1}{16}\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{4} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\ln(2)}{4} = \frac{3 + \ln(2)}{16} > 0.$$

Donc $v_1 > v_0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant monotone, elle est nécessairement croissante.

Conclusion, $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

IIIC.5 Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n).$$
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n \leqslant v_{n+1}$$
de plus la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, en tant que sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $[0;1]$. Donc par la décroissance de f sur $[0;1]$,
$$f(v_n) \geqslant f(v_{n+1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad w_n \geqslant w_{n+1}.$$
Conclusion, $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

IIIC.6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$|v_{n+1} - w_{n+1}| = |u_{2n+2} - u_{2n+3}| = |f(u_{2n+1}) - f(u_{2n+2})|.$$
La fonction f étant dérivable sur $[0;1]$, et puisque $u_{2n+1} \in [0;1]$ et $u_{2n+2} \in [0;1]$, on a par le théorème des accroissements finis,
$$|v_{n+1} - w_{n+1}| \leqslant \sup_{z\in[0;1]} |f'(z)|\, |u_{2n+1} - u_{2n+2}|.$$
Or on a vu précédemment que $\sup_{z\in[0;1]} |f'(z)| \leqslant \frac{3}{4}$. D'où
$$|v_{n+1} - w_{n+1}| \leqslant \frac{3}{4} |u_{2n+1} - u_{2n+2}| = \frac{3}{4} |f(u_{2n}) - f(u_{2n+1})|.$$
A nouveau par le théorème des accroissements finis,
$$|v_{n+1} - w_{n+1}| \leqslant \frac{3}{4} \sup_{z\in[0;1]} |f'(z)|\, |u_{2n} - u_{2n+1}| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 |u_{2n} - u_{2n+1}| = \left(\frac{3}{4}\right)^2 |v_n - w_n|.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_{n+1} - w_{n+1}| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 |v_n - w_n|.}$$

IIIC.7 Posons $q = \left(\frac{3}{4}\right)^2$. De même que dans la question IIIB.3, on démontre par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_n - w_n| \leqslant q^n |v_0 - w_0| = q^n |u_0 - u_1| = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \frac{1}{4}.$$
Or $q \in [0;1]$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} q^n |u_0 - u_1| = 0.$$
Donc par encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty} |v_n - w_n| = 0.$$
De plus, par ce qui précède, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit que
$\boxed{\text{les suites } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$

IIIC.8 Puisqu'elles sont adjacentes, on peut affirmer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune notée ℓ. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des termes pairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des termes impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la limite de ces deux suites étant identique, on en déduit d'une propriété du cours que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune ℓ. Conclusion,
$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

Exercice IV (Rechercher (facultatif))

Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = \frac{x}{2}$, on a
$$f(x) = f(2y) = f(y) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$
De même en prenant $y = \frac{x}{4}$, on en déduit que
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f(2y) = f(y) = f\left(\frac{x}{4}\right).$$

En itérant, on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Or $\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus f est continue en 0 donc par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = f(0)}$$

i.e. f est constante sur $\mathbb{R}$.