Devoir Maison 9

A faire pour le jeudi 14/03

Exercice I (S'entrainer)

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on pose

$$F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}$$
$$G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \right\}.$$

I.1 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une famille génératrice de F.

I.2 Déterminer proprement une base de F. Quelle est la dimension de F ?

I.3 Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.

I.4 Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Suivant les valeurs de λ et μ déterminer un équivalent simple de $\lambda\, 2^n + \mu 3^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I.5 Montrer que F et G sont en somme directe.

I.6 Montrer que F et G ne sont pas supplémentaires dans E.

Exercice II (S'entrainer)

On définit la suite polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

II.1 Calculer P_2, P_3 et P_4.

II.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer proprement le degré et le coefficient dominant de P_n.

II.3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

II.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ une expression simple de $P_n(2\cos(\theta))$.

II.5 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes. Montrer que

$$[\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P\left(2\cos(\theta)\right) = Q\left(2\cos(\theta)\right)] \qquad \Rightarrow \qquad P = Q.$$

II.6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des réels $\theta \in [0;\pi]$ tels que $P_n\left(2\cos(\theta)\right) = 0$.

II.7 En déduire que P_n possède n racines dans $[-2;2]$. Le polynôme P_n est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? scindé dans $\mathbb{R}[X]$?

Tournez la page s'il vous plait

Exercice III (S'entrainer)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient F et G deux espaces vectoriels de E. On souhaite démontrer l'affirmation suivante qui caractérise l'existence d'un sous-espace supplémentaire **commun** à F et G :

$$\dim(F) = \dim(G) \quad \Leftrightarrow \quad \exists H \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}$$

On note $\mathscr{P}$ l'assertion

$$\mathscr{P} : \text{« } \exists H \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases} \text{ »}$$

Enfin pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on définit

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } \forall F, G,\ \dim(F) = \dim(G) = n - k \quad \Rightarrow \quad \exists H \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases} \text{ »}$$

Partie A : Préliminaire

IIIA.1 Démontrer que $\dim(F) = \dim(G)$ est une condition nécessaire pour que $\mathscr{P}$ soit vraie.

IIIA.2 Justifier que si $F = G$, alors $\mathscr{P}$ est vraie.

IIIA.3 Justifier que $\mathscr{P}(0)$ est vraie et préciser alors H le supplémentaire commun.

On suppose dans toute la suite que $\dim(F) = \dim(G) = p \in \mathbb{N}$, $k = n - p$ et que $F \neq G$.

Partie B : cas des hyperplans

On suppose dans cette partie (et dans cette partie uniquement) que $k = 1$ i.e. $p = n - 1$. On dit alors que F et G sont des hyperplans de E.

IIIB.1 Montrer qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $f \notin G$ et $g \notin F$.

IIIB.2 Soit $a = f + g$. Montrer que $a \notin F \cup G$.

IIIB.3 Montrer que $H = \mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire commun à F et G et en déduire que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Partie C : Récurrence sur la dimension commune

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout couple (F', G') de sous-espaces vectoriels de dimension $n - k$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension $n - (k+1)$. On suppose toujours $F \neq G$.

IIIC.1 En vous inspirant de la partie précédente, montrer qu'il existe $a \in E \setminus F \cup G$.

IIIC.2 Montrer que F et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe et que G et $\mathrm{Vect}(a)$ sont également en somme directe.

IIIC.3 On pose $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Quelle est la dimension de F' ? de G' ?

IIIC.4 En déduire qu'il existe H' un sous-espace vectoriel de E tel que $F' \oplus H' = G' \oplus H' = E$.

IIIC.5 Quelle est la dimension de H' ?

IIIC.6 On pose $H = H' + \mathrm{Vect}(a)$. Justifier que $\mathrm{Vect}(a)$ et H' sont en somme directe et en déduire la dimension de H.

IIIC.7 Soit $x \in E$.

(a) Montrer qu'il existe $y \in H'$, $z_1 \in F$ et $z_2 \in \mathrm{Vect}(a)$ tels que $x = y + z_1 + z_2$.

(b) En déduire que $x \in F + H$.

IIIC.8 Déduire des questions précédentes que $E = F \oplus H$.

IIIC.9 Montrer que $E = G \oplus H$.

IIIC.10 Conclure que $\mathscr{P}$ est vraie.

Exercice IV (Rechercher (facultatif))

Démontrer que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.