Corrigé du Devoir Maison 7

Solution de l'exercice I

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on pose

$$F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}$$
$$G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \right\}.$$

I.1
- $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = E$ par définition.
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5u_{n+1} - 6u_n = 0 = u_{n+2}$. Donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = 0_E \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in F^2$, avec $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $w = \lambda\, u + \mu v$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $w \in F$. Par définition de w, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda\, u_n + \mu v_n$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} = \lambda\, u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda\,(5u_{n+1} - 6u_n) + \mu\,(5v_{n+1} - 6v_n) && \text{car } u \in F \text{ et } v \in F \\ &= 5\,(\lambda\, u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - 6\,(\lambda\, u_n + \mu v_n) \\ &= 5w_{n+1} - 6w_n. \end{aligned}$$

On a donc bien $w \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

$\boxed{\text{Conclusion, } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Pour déterminer une famille génératrice de F, on remarque que F est un ensemble de suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Donnons donc une formule explicite de ces suites. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence des suites de F :

$$r^2 = 5r - 6 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 5r + 6 = 0. \qquad (E_c)$$

Le discriminant associé est donné par $\Delta = 25 - 24 = 1$ et donc les racines sont $\frac{5-1}{2} = 2$ et $\frac{5+1}{2} = 3$. Donc d'après le cours on a

$$F = \left\{ \lambda\,(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\,(3^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$\boxed{F = \operatorname{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).}$$

Notez que de ce dernier raisonnement, on pouvait directement en déduire que F est un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{\text{La famille } \mathscr{F} = \left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \text{ est donc génératrice dans } F.}$

I.2 On a montré à la question précédente que $\mathscr{F} = \left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est génératrice dans F. Montrons qu'elle est également libre dans F pour en déduire qu'elle est une base de F. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\,(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\,(3^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda\, 2^n + \mu 3^n = 0.$$

En particulier pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\,\lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -2\mu + 3\mu = \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$$

Donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Or d'après la question précédente elle est également génératrice de F.

Donc $\boxed{\mathscr{F} = \left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \text{ est une base de } F}$ et par conséquent, $\boxed{\dim(F) = \operatorname{Card}\,(\mathscr{F}) = 2}$.

I.3
- $G \subseteq E$ par définition.
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ Donc $u = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in G$.

- Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(u,v)\in G$, avec $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}=\lambda\, u+\mu v$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=\lambda\, u_n+\mu v_n$. Or puisque $u\in G$, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ et de même $v\in G \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}v_n=0$. Donc par somme de limites,
$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}(\lambda\, u_n+\mu v_n)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0.$$
Donc $w\in G$ et G est stable par combinaison linéaire.

$\boxed{\text{Conclusion } G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

I.4 Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, on sait que $2^n \underset{n\to+\infty}{\ll} 3^n$. Donc si $\mu\neq 0$, $\lambda\, 2^n+\mu 3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu 3^n$. Si $\mu=0$ alors $\lambda\, 2^n+\mu 3^n=\lambda\, 2^n$. Conclusion
$$\boxed{\lambda\, 2^n+\mu 3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases}\mu 3^n & \text{si } \mu\neq 0\\ \lambda\, 2^n & \text{si } \mu=0.\end{cases}}$$

I.5 Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F\cap G$. Puisque $u\in F$ et que $\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}},(3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est génératrice dans F (question I.1), on en déduit qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u=\lambda\,(2^n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu\,(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.e.
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\lambda\, 2^n+\mu 3^n.$$
Or on sait aussi que $u\in G$ i.e. $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Donc
$$\lim_{n\to+\infty}\lambda\, 2^n+\mu 3^n=0.$$
Supposons $\mu\neq 0$. Alors d'après la question précédente, $\lambda\, 2^n+\mu 3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mu 3^n$. Donc
$$0=\lim_{n\to+\infty}\lambda\, 2^n+\mu 3^n=\lim_{n\to+\infty}\mu 3^n=\mu\lim_{n\to+\infty}3^n=\pm\infty \qquad \text{car } \mu\neq 0$$
ce qui est contradictoire. Donc $\mu=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda\, 2^n$. Alors $0=\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\lambda\, 2^n$ ce qui impose également que $\lambda=0$ (sinon la suite diverge). Ainsi, $\lambda=\mu=0$ et par suite $u=0$. On a donc montré que $F\cap G\subseteq\{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$ la réciproque étant vraie du fait que F et G soient des sous-espaces vectoriels de E, on conclut que $F\cap G=\{0\}$ et donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont en somme directe}}$.

I.6 Puisque E et F sont en somme directe, pour montrer qu'ils ne sont pas supplémentaires, il faut démontrer que $F+G\neq E$. Or $F+G\subseteq E$, il faut donc démontrer que $E\nsubseteq F+G$. En particulier, nouys allons montré que la suite constante $U=(1)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ n'est pas dans $F+G$. On procède par l'absurde. Supposons que $U\in F+G$ alors par définition, il existe $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in G$ tels que
$$U=u+v.$$
Puisque $u\in F$, par la question I.1, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_n=\lambda\, 2^n+\mu 3^n.$$
De plus $v\in G$ et donc $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$1=\lambda\, 2^n+\mu 3^n+v_n \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty}v_n=0.$$
A nouveau on peut raisonner en déterminant le terme prépondérant. Donnons ici une rédaction un peu différente en divisant par le terme dominant : pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\frac{1}{3^n}=\lambda\frac{2^n}{3^n}+\mu+\frac{v_n}{3^n} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty}v_n=0.$$
Par passage à la limite, on obtient,
$$0=0+\mu+0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu=0.$$
Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$1=\lambda\, 2^n+v_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2^n}=\lambda+\frac{v_n}{2^n} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty}v_n=0.$$
Donc par passage à la limite quand $n\to+\infty$,
$$\lambda=0.$$
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=1$ et par passage à la limite, $0=1$ ce qui est impossible. Par conséquent $U\notin F+G$ et $E\nsubseteq F+G$ et l'on conclut que $\boxed{F \text{ et } G \text{ ne sont pas supplémentaires dans } E}$.

Solution de l'exercice II

S'entrainer

On définit la suite polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

II.1 En calculant de proche en proche,

$$\begin{aligned} P_2 &= XP_1 - P_0 = X^2 - 2, \\ P_3 &= XP_2 - P_1 = X\left(X^2-2\right) - X = X^3 - 2X - X = X^3 - 3X, \\ P_4 &= XP_3 - P_2 = X\left(X^3 - 3X\right) - \left(X^2-2\right) = X^4 - 3X^2 - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P_2 = X^2 - 2, \qquad P_3 = X^3 - 3X, \qquad P_4 = X^4 - 4X^2 + 2.}$$

II.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad P_n = X^n + Q_n$ ». Démontrons $\mathscr{P}(n)$ par récurrence double.

- *Initialisation.* Si $n = 1$, alors $P_1 = X + 0$ donc avec $Q_0 = 0 \in \mathbb{R}_0[X]$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
  Si $n = 2$, alors d'après la question précédente, $P_2 = X^2 - 2$ donc avec $Q = -2 \in \mathbb{R}_1[X]$, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et que $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraie. Alors il existe $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P_n = X^n + Q_n$ et $P_{n+1} = X^{n+1} + Q_{n+1}$. Ainsi par définition,

$$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n = X\left(X^{n+1} + Q_{n+1}\right) - X^n - Q_n = X^{n+2} + \underbrace{XQ_{n+1} - X^n - Q_n}_{=Q_{n+2}}.$$

  Posons alors $Q_{n+2} = XQ_{n+1} - X^n - Q_n$, on observe que $P_{n+2} = X^{n+2} + Q_{n+2}$ et

$$\deg\left(Q_{n+2}\right) \leqslant \max\left(\deg\left(XQ_{n+1}\right), \deg\left(X^n\right), \deg\left(Q_n\right)\right).$$

  Or $\deg\left(XQ_{n+1}\right) = 1 + \deg\left(Q_{n+1}\right) \leqslant 1 + n$, car $Q_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg\left(X^n\right) = n$ et $\deg\left(Q_n\right) \leqslant n-1$. Donc, $\deg\left(Q_{n+2}\right) \leqslant \max\left(n+1, n, n-1\right) = n+1$. Ainsi $Q_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ ce qui avec l'égalité $P_{n+2} = X^{n+2} + Q_{n+2}$ démontre $\mathscr{P}(n+2)$.
- *Conclusion.* Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On conclut de cette démonstration le fait que

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \deg\left(P_n\right) = n \text{ et le coefficient dominant de } P_n \text{ vaut } 1.}$ Cette affirmation n'est pas vraie en $n = 0$. On ajoute que si $n = 0$, $\boxed{\deg\left(P_0\right) = 0 \text{ et le coefficient dominant de } P_0 \text{ vaut } 2.}$

II.3 Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ par « $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ ». Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie par une récurrence double.

- *Initialisation.* Si $n = 0$, $P_0\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2 = z^0 + \frac{1}{z^0}$ et si $n = 1$, $P_1\left(z + \frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Alors, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ et $P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$. Donc

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}. \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est aussi vraie.
- *Conclusion.* La propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.}$$

II.4 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Ici z est un complexe de module 1 et est donc non nul. Donc d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n\left(\mathrm{e}^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n + \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n}.$$

Or $\mathrm{e}^{i\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et par la formule de Moivre, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n + \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n} = \mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta).}$$

II.5 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P(2\cos(\theta)) = Q(2\cos(\theta))$. La fonction $\mathbb{R} \to [-2;2]$, $\theta \mapsto 2\cos(\theta)$ est surjective dans $[-2;2)$. Donc l'égalité précédente implique également que pour tout $u \in [-2;2]$

$$P(u)Q(u).$$

Or $[-2;2]$ est une partie infinie de $\mathbb{R}$. Donc d'après le cours, on en déduit que $P = Q$. On a donc bien montré que

$$\boxed{[\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(2\cos(\theta)) = Q(2\cos(\theta))] \qquad \Rightarrow \qquad P = Q.}$$

II.6 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0;\pi]$. D'après la question II.4, on a

$$\begin{aligned} P_n(2\cos(\theta)) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 2\cos(n\theta) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \cos(n\theta) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad n\theta \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } n = 0, \text{ alors l'équation } P_n(2\cos(\theta)) = 0 \text{ n'admet aucun solution.}}$ Si $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} P_n(2\cos(\theta)) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \quad \left[\frac{\pi}{n}\right] \\ & \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2} + k\right). \end{aligned}$$

Or *theta* doit être entre 0 et π et pour $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2}+k\right) \leqslant \pi \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant \frac{1}{2} + k \leqslant n \;\Leftrightarrow\; 0 \leqslant k \leqslant n-1$. On en déduit donc que pour tout $n \geqslant 1$,

$$P_n(2\cos(\theta)) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;n-1]\!], \quad \theta = \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2} + k\right).$$

II.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a $P_n\left(2\cos\left(\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)\right) = 0$. Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, posons $\theta_k = \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2}+k\right)$ et $\alpha_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)$. Les réels θ_k sont deux à deux distincts dans $[0;\pi]$ et la fonction $2\cos$ est injective (car strictement décroissante) sur $[0;\pi]$ donc les α_k sont tous distincts les uns des autres et d'après ce qui précèdent sont des racines de P_n. De plus comme la cosinus est à valeurs dans $[-1;1]$, les réels α_k sont à valeurs dans $[-2;2]$. Donc

$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes dans } [-2;2] \text{ (encore vrai si } n = 0).}$

On sait que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou les polynômes de degré 2 ayant un discriminant négatif. Donc d'après la question II.2, pour tout $n \geqslant 3$, P_n est de degré supérieur ou égal à 3 et n'est donc pas irréductible. Si $n = 0$, P_0 est constant et donc non irréductible. Si $n = 2$, on a vu que $P_2 = X^2 - 2 = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)$ et donc P_2 n'est pas irréductible. Si $n = 1$, $P_1 = X$ est bien irréductible. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{P_n \text{ est irréductible} \qquad \Leftrightarrow \qquad n = 1.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que P_n possède n racines distinctes dans $\mathbb{R}$ et d'après la question II.2 est de degré n. Par conséquent, $\boxed{P_n \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]}$ et même puisque son coefficient vaut 1 :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P_n = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k).$$

Solution de l'exercice III

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient F et G deux espaces vectoriels de E. On souhaite démontrer l'affirmation suivante qui caractérise l'existence d'un sous-espace supplémentaire **commun** à F et G :

$$\dim(F) = \dim(G) \quad \Leftrightarrow \quad \exists H \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}$$

On note $\mathscr{P}$ l'assertion

$$\mathscr{P} : \text{« } \exists H \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases} \text{ »}$$

Enfin pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on définit

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } \forall F, G,\ \dim(F) = \dim(G) = n - k \quad \Rightarrow \quad \exists H \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases} \text{ »}$$

Partie A : Préliminaire

IIIA.1 Si $\mathscr{P}$ est vraie alors il existe H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus H = E$ et $G \oplus H = E$. Donc on sait que $\dim(F) = \dim(E) - \dim(H) = n - \dim(H) = \dim(G)$. Donc si $\mathscr{P}$ est vraie alors $\dim(F) = \dim(G)$. Autrement dit $\boxed{\dim(F) = \dim(G) \text{ est une condition nécessaire pour que } \mathscr{P} \text{ soit vraie.}}$

IIIA.2 On suppose $F = G$, alors démontrer $\mathscr{P}$ revient à démontrer que F admet un supplémentaire (qui sera alors un supplémentaire de $G = F$). Or d'après le cours si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie alors il admet un supplémentaire. Donc $\boxed{\text{si } F = G, \text{ alors } \mathscr{P} \text{ est vrai}}$.

IIIA.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim(F) = \dim(G) = 0$. Alors nécessairement $F = G = \{0_E\}$. Donc $\boxed{H = E \text{ est supplémentaire à } F = G \text{ dans } E \text{ et } \mathscr{P}(0) \text{ est vraie}}$.

On suppose dans toute la suite que $\dim(F) = \dim(G) = p \in \mathbb{N}$, $k = n - p$ et que $F \neq G$.

Partie B : cas des hyperplans

On suppose dans cette partie (et dans cette partie uniquement) que $k = 1$ i.e. $p = n - 1$. On dit alors que F et G sont des hyperplans de E.

IIIB.1 Supposons $F \subseteq G$. Par hypothèse on a $\dim(F) = \dim(G)$ donc d'après le cours, on en déduit que $F = G$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse $F \neq G$. Donc on en déduit que $F \nsubseteq G$ et par conséquent, $\boxed{\text{il existe } f \in F \text{ tel que } f \notin G}$. Par symétrie des hypothèses sur F et G, par un même raisonnement, on montre que $G \nsubseteq F$ et donc, $\boxed{\text{il existe } g \in G \text{ tel que } g \notin F}$.

IIIB.2 Soit $a = f + g$. Montrons que $a \notin F \cup G$. On procède par l'absurde. Supposons que $a \in F \cup G$.

- Premier cas, $a \in F$. Puisque $f \in F$ et que F est un sous-espace vectoriel de E, on sait que $a - f \in F$. Donc $g = a - f \in F$ ce qui contredit l'hypothèse sur g.
- Second cas, $a \in G$, alors puisque G est un sous-espace vectoriel de E et que $g \in G$, on a $f = a - g \in G$ ce qui contredit l'hypothèse sur f.

On obtient donc une contradiction dans tous les cas donc $\boxed{a \notin F \cup G}$.

IIIB.3 On pose $H = \text{Vect}(a)$. Montrons que H est un supplémentaire commun à F et G. Montrons que $H \cap F = \{0\}$. Soit $x \in H \cap F$ alors $x \in H = \text{Vect}(a)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$. De plus $x \in F$, donc $\lambda a \in F$. Si $\lambda \neq 0$, par stabilité de F par multiplication externe (car F est un sous-espace vectoriel de E), on trouve que $a = \frac{1}{\lambda} x = \frac{1}{\lambda} \lambda a \in F$ ce qui contredit la question précédente dans laquelle on a montré que $a \notin F \cup G$ et donc a fortiori $a \notin F$. Ainsi, on en déduit que $\lambda = 0$ et par suite $x = 0_E$. Donc $H \cap F \subseteq \{0\}$ l'inclusion réciproque étant vraie du fait que F et H sont des sous-espaces vectoriels de E, on en déduit que $H \cap F = \{0\}$. Donc H et F sont en somme directe. Or on sait également que $\dim(H) + \dim(F) = 1 + p = 1 + n - 1 = n = \dim(E)$. Donc on en déduit que F et H sont supplémentaires dans E :

$$F \oplus H = E.$$

Montrons maintenant que H est aussi un supplémentaire de G. Soit $x \in H \cap G$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$ et on a $x \in G$. Donc si $\lambda \neq 0$, alors $a = \frac{1}{\lambda} x \in G$ ce qui est contradictoire avec la question précédente.

Donc $\lambda = 0$ et $x = 0_E$. Donc $H \cap G \subseteq \{0\}$. Or on a également $\dim(H) + \dim(F) = 1 + n - 1 = n = \dim(E)$ donc

$$G \oplus H = E.$$

Conclusion : $\boxed{H \text{ est un supplémentaire commun à } F \text{ et } G \text{ et } \mathscr{P}(1) \text{ est vraie}}$.

Partie C : Récurrence sur la dimension commune

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout couple (F', G') de sous-espaces vectoriels de dimension $n - k$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension $n - (k+1)$. On suppose toujours $F \neq G$.

IIIC.1 On a $\dim(F) = \dim(G) = n - (k+1)$. Donc si $F \subseteq G$, alors $F = G$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $F \neq G$. Donc $F \not\subseteq G$ et il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$. De même $G \not\subseteq F$ et donc il existe $g \in G$ tel que $g \notin F$. On pose $a = f + g \in E$. Alors $a \notin F$ car sinon $g = a - f \in F$ et $a \notin G$ car sinon $f = a - g \in G$. Donc $a \notin F \cup G$. Ainsi $\boxed{\text{il existe } a \in E \setminus F \cup G}$.

IIIC.2 Soit $x \in F \cap \mathrm{Vect}(a)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda\, a$ donc $\lambda\, a \in F$ et si $\lambda \neq 0$, $a \in F$ ce qui est contradictoire. Donc $\lambda = 0$ et ainsi $x = 0_E$. Donc $F \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$ et F et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe. De même si $x \in G \cap \mathrm{Vect}(a)$, alors $x = \lambda\, a \in G$. Or $a \notin G$ donc nécessairement $\lambda = 0$ et $x = 0$. Donc G et $\mathrm{Vect}(a)$ sont également en somme directe. Ainsi, $\boxed{\text{on a } \mathrm{Vect}(a) \text{ en somme directe avec } F \text{ et } G}$.

IIIC.3 On pose $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(a)$. On a alors directement $\dim(F') = \dim(F) + \dim(\mathrm{Vect}(a)) = n - (k+1) + 1 = n - k$. De même $\dim(G') = \dim(F) + \dim(\mathrm{Vect}(a)) = n - (k+1) + 1 = n - k$. Et donc

$$\boxed{\dim(F') = \dim(G') = n - k}.$$

IIIC.4 F' et G' sont deux sous-espaces vectoriels de E de dimension commune $n-k$. Donc par l'hypothèse de récurrence, $\boxed{\text{il existe } H' \text{ un sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } F' \oplus H' = G' \oplus H' = E.}$

IIIC.5 Des questions précédentes, on a $\dim(H') + \dim(F') = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(H') + n - k = n$. Ainsi,

$$\boxed{\dim(H') = k}.$$

IIIC.6 On pose $H = H' + \mathrm{Vect}(a)$. Soit $x \in \mathrm{Vect}(a) \cap H'$. Puisque $x \in \mathrm{Vect}(a)$, alors $x = x + 0_E$ avec $x \in \mathrm{Vect}(a)$ et $0_E \in F$. Donc $x \in \mathrm{Vect}(a) \oplus F = F'$. Or $x \in H'$, donc $x \in F' \cap H'$. Or par définition, H' est un supplémentaire de F' donc H' est en somme directe avec F' et donc $F' \cap H' = \{0\}$. Donc $x = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Vect}(a) \cap H' = \{0\}$ et $\boxed{\mathrm{Vect}(a) \text{ et } H' \text{ sont en somme directe}}$. Donc $H = \mathrm{Vect}(a) \oplus H'$ et

$$\boxed{\dim(H) = \dim(H') + \dim(\mathrm{Vect}(a)) = k + 1}.$$

IIIC.7 Soit $x \in E$.

(a) On sait que $E = H' + F'$ (question IIIC.4). Donc il existe $y \in H'$ et $z \in F'$ tels que $x = y + z$. Mais par définition de F', on a $F' = F + \mathrm{Vect}(a)$. Donc il existe $z_1 \in F$ et $z_2 \in \mathrm{Vect}(a)$ tels que $z = z_1 + z_2$. Ainsi

$$\boxed{\exists y \in H',\ \exists z_1 \in F, \exists z_2 \in \mathrm{Vect}(a)\,, \quad x = y + z_1 + z_2}.$$

(b) On a d'après la question précédente $x = z_1 + (y + z_2)$. Or $y' = y + z_2 \in H' + \mathrm{Vect}(a)$ Donc par définition de H, $y' \in H$ et ainsi

$$\boxed{x = \underbrace{z_1}_{\in F} + \underbrace{y'}_{\in H} \in F + H.}$$

IIIC.8 On a démontré dans la question précédente que pour tout $x \in E$, $x \in F + H$. Donc $E = F + H$. Montrons que la somme est directe. Soit $x \in F \cap H$ alors $x \in H = H' + \mathrm{Vect}(a)$. Donc il existe $x_1 \in H'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_1 + \lambda\, a \Leftrightarrow x_1 = \underbrace{x}_{\in F} - \underbrace{\lambda\, a}_{\in \mathrm{Vect}(a)} \in F + \mathrm{Vect}(a) = F'$ Donc $x_1 \in F' \cap H'$. Or par définition de H', H' et F' sont en somme directe. Donc $x_1 = 0_E$ et ainsi $x = \lambda\, a \in \mathrm{Vect}(a)$. Or $x \in F$ donc $x \in F \cap \mathrm{Vect}(a)$. Or F et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe (question IIIC.2) donc $x = 0_E$ et ainsi $F \cap H = \{0_E\}$. Donc F et H sont en somme directe. Or $E = F + H$, donc $\boxed{E = F \oplus H}$.

IIIC.9 On procède de même que précédemment. Soit $x \in E$. On sait que $E = G' \oplus H'$ donc il existe $(y,z) \in G' \times H'$ tel que $x = y + z$. Puis, $y \in G' = G \oplus \text{Vect}(a)$ donc il existe $y_1 \in G$ et $y_2 \in \text{Vect}(a)$ tels que $y = y_1 + y_2$ et donc $x = y_1 + y_2 + z$. Or $y_2 + z \in \text{Vect}(a) + H' = H$ donc $x = y_1 + (y_2 + z) \in G + H$. Ainsi $E = G + H$. Montrons que G et H sont en somme directe. Procédons de façon différente que précédemment (pour changer) eu utilisant directement la définition. Soient $(x,y) \in G \times H$ et $(x',y') \in G \times H$ tels que

$$x + y = x' + y'.$$

Comme $(y,y') \in H^2$, il existe $(y_1, y_1') \in \text{Vect}(a)^2$ et $(y_2, y_2') \in (H')^2$ tels que $y = y_1 + y_2$ et $y' = y_1' + y_2'$. Donc

$$x + y_1 + y_2 = x' + y_1' + y_2'$$

Or $z = x + y_1 \in G + \text{Vect}(a) = G'$ et $z' = x' + y_1' \in G + \text{Vect}(a) = G'$. On a donc

$$z + y_2 = z' + y_2',$$

avec $(z,z') \in (G')^2$ et $(y_2, y_2') \in (H')^2$. Or G' et H' sont en somme directe donc $z = z'$ et $y_2 = y_2'$. Donc $x + y_1 = x' + y_1'$. Or $(x,x') \in G^2$, $(y_1, y_1') \in \text{Vect}(a)^2$ et G et $\text{Vect}(a)$ sont en somme directe. Donc $x = x'$ et $y_2 = y_2'$. Ainsi, $x = x'$ et $y = y_1 + y_2 = y_1' + y_2' = y'$ ce qui démontre que G et H sont en somme directe. Conclusion

$$\boxed{E = G \oplus H.}$$

IIIC.10 On a supposé $\mathscr{P}(k)$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$ puis l'on s'est muni de deux espaces vectoriels F et G de dimension $n - (k+1)$ et l'on a montré qu'il existe H un supplémentaire commun à F et à G. Donc on en déduit que $\mathscr{P}(k+1)$. On a donc montré $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. Or on a vu dans la partie A que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. On en déduit selon le principe de récurrence que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e. $\boxed{\mathscr{P} \text{ est vraie}}$.

Solution de l'exercice IV

Montrons que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Procédons par l'absurde et supposons que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension finie. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{G} = (P_1, \dots, P_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}[X]$ génératrice dans $\mathbb{R}[X]$. On pose pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ $d_i = \deg(P_i)$ puis $d = \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]}(d_i)$. Puisque $\mathscr{G}$ est une famille finie de vecteurs, la famille $(d_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est aussi finie et admet donc bien un maximum. Donc d est bien définie. $X^{d+1} \in \mathbb{R}[X]$ et par hypothèse $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$. Donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$X^{d+1} = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

Donc

$$d + 1 = \deg\left(X^{d+1}\right) \leqslant \max\left(\deg(\lambda_1 P_1), \dots, \deg(\lambda_n P_n)\right).$$

Or pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\deg(\lambda_i P_i) = \begin{cases} d_i \text{ si } \lambda_i \neq 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda_i = 0 \end{cases}$. Donc dans tous les cas, $\deg(\lambda_i P_i) \leqslant d_i$. Et donc

$$d + 1 \leqslant \max(d_1, \dots, d_n) = d,$$

ce qui est absurde. Donc $\boxed{\mathbb{R}[X] \text{ est de dimension infinie}}$.