Épreuve de Mathématiques 10
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Exercice 1 - Géométrie de l'espace

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On munit l'espace $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$. On donnera dans la suite les coordonnées dans ce repère.

On considère la droite $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$ ainsi que le point $\Omega_\lambda\,(0, 1, \lambda)$.

1. Déterminer un point A de $\mathcal{D}$ ainsi qu'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$.
2. Montrer que la distance de Ω_λ à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d\,(\Omega_\lambda, \mathcal{D}) = \sqrt{\frac{5\,\lambda^2 + 16\,\lambda + 56}{6}}.$$

On note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble d'équation $z = 0$ et $\mathcal{E}_2$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0$.

3. Déterminer la nature des ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et donner leurs caractéristiques (point et vecteur directeur dans le cas d'une droite, point et vecteur normal dans le cas d'un plan, centre et rayon dans le cas d'une sphère)
4. On note $\mathcal{C} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle d'un plan que l'on précisera et déterminer son centre I et son rayon r.
5. Justifier que Ω_λ est un point appartenant à l'axe de $\mathcal{C}$ i.e. à la droite passant par I et perpendiculaire à tous les vecteurs $\overrightarrow{IM}$, pour $M \in \mathcal{C}$.
6. Soit $\mathcal{S}_\lambda$ la sphère de centre Ω_λ contenant le cercle $\mathcal{C}$. Déterminer le rayon R_λ de $\mathcal{S}_\lambda$.
7. Montrer qu'il existe exactement 2 valeurs de λ pour lesquelles $\mathcal{S}_\lambda$ est tangente à $\mathcal{D}$.

Exercice 2 - Variables aléatoires

Un secrétaire doit joindre N personnes.

- Le premier jour il appelle ces N personnes, chacune ayant une probabilité $p \in]0;1[$ de répondre (et cette probabilité est indépendante des autres appels). On note alors X_1 le nombre de personnes qui ont répondu.
- Le deuxième jour, le secrétaire rappelle tous ceux qui n'ont pas répondu à son premier appel (mais ne rappelle pas ceux qui ont déjà répondu à son appel le premier jour). On suppose que chaque personne appelée présente toujours une probabilité p de répondre. On note alors X_2 le nombre de personnes qui ont répondu durant cette deuxième journée.
- Le secrétaire est tenace et rappelle le troisième jour tous ceux qui n'ont pas répondu les deux jours précédents et ainsi de suite...

  $\vdots$

- Il rappelle donc le jour n tous ceux qui n'ont pas répondu les $n-1$ jours précédents. Chacune de ces personnes a toujours une probabilité p de répondre à cet n-ième appel. On note alors X_n le nombre de personnes ayant répondu durant le jour n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note également Z_n le nombre TOTAL de personnes qui ont répondu durant les n premiers jours.

Partie I - préliminaire

1. (a) Quelle est la loi de X_1 ? Justifier.

   (b) En déduire son univers image, son espérance et sa variance.
2. Soit $i \in [\![0;N]\!]$.

   (a) Quelle est l'univers image de X_2 sachant $X_1 = i$?

   (b) Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = i$ et préciser $\mathbb{P}\left(X_2 = j \mid X_1 = i\right)$, pour $j \in [\![0;N]\!]$.

   (c) En déduire la loi conjointe de X_1 et X_2.

Partie II - cas $N = 2$

On suppose dans cette partie que $N = 2$ et que $p = \frac{1}{2}$. On donne alors la loi conjointe de X_1 et X_2 par le tableau suivant :

X_2 \ X_1	0	1	2
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

3. Vérifier par un exemple de calcul de probabilité (qui ne retourne pas 0) la cohérence du tableau avec la question 2.(c).
4. Déterminer, en justifiant les calculs avec soin, la loi de X_2.
5. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
6. Calculer l'espérance et la variance de X_2.

Partie III - loi de Z_n

On revient au cas général, où N est un entier naturel non nul quelconque et p un réel entre $]0;1[$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer Z_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$.
8. (a) Soit $k \geqslant 2$, déterminer $\mathbb{P}\left(X_k = 0 \mid (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_{k-1} = 0) \right)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.
   (c) Que vaut $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$?
9. Montrer à l'aide de la question 2 que pour tout $(i,j) \in [\![0;N]\!]^2$,
$$\mathbb{P}(Z_2 = j \mid Z_1 = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j-i} p^{j-i} (1-p)^{N-j} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
10. Soit $j \in [\![0;N]\!]$. En déduire que
$$\mathbb{P}(Z_2 = j) = p^j (1-p)^{2N-2j} \sum_{i=0}^{j} \binom{N-i}{j-i} \binom{N}{i} (1-p)^{j-i}.$$
11. Simplifier
$$\frac{\binom{N-i}{j-i}\binom{N}{i}}{\binom{j}{i}}.$$
12. On pose $p_2 = p(2-p)$. Conclure que $Z_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_2)$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_n)$, où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels définie par récurrence par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = (1-p)\, p_n + p \qquad \text{et} \qquad p_1 = p.$$

13. Déterminer une expression de p_n en fonction de p et de $n \in \mathbb{N}^*$.
14. Retrouver alors le résultat de la question 8.(b).

Fin de l'épreuve