Corrigé du Devoir Surveillé 1

Solution de l'exercice I

I.1

(i)	$\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ x > y$	(ii)	$\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ x > y$
(iii)	$\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ x \geqslant y$	(iv)	$\exists y \in E,\ \exists x \in E,\ x > y$

I.2
- L'assertion (i) est vraie car pour tout $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \leqslant x = y$.
- L'assertion (ii) est fausse, aucun réel n'est supérieur à tous les autres. Pour justifier que (ii) est fausse, on montre que sa négation , $\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ x > y$ est vraie. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $x = y+1$, on a bien $x = y + 1 > y$.
- L'assertion (iii) est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = x + 1$, on a bien $x < x + 1 = y$. En réalité on observe même que (iii) est la négation de (ii) (on note que les variables x et y sont muettes dans ces assertions).
- L'assertion (iv) est fausse. Contre-exemple : en prenant $y = 0$ et $x = 1$, l'assertion $x \leqslant y$ est bien mise en défaut.

$\boxed{\text{Si } E = \mathbb{R}, \text{ les assertions (i) et (iii) sont vraies et les assertions (ii) et (iv) sont fausses.}}$

I.3
- L'assertion (i) reste vraie car pour tout $x \in E$, on peut toujours prendre $y = x \in E$ et on a bien $x \leqslant x = y$.
- L'assertion (ii) devient vraie car l'ensemble E admet un plus grand élément. En prenant $y = 5$, on a $\forall x \in E,\ x \leqslant 5 = y$.
- L'assertion (iii) devient fausse car le nombre $x = 5$ n'admet pas d'élément qui lui soit strictement supérieur, il n'existe pas d'élément $x \in E$ tel que $5 < x$. Encore une fois puisque (iii) est la négation de (ii) cela concorde avec le fait que (ii) est vraie.
- L'assertion (iv) reste fausse. Contre-exemple : en prenant $y = 1$ et $x = 2$, l'assertion $x \leqslant y$ est bien mise en défaut.

$\boxed{\text{Si } E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ les assertions (i) et (ii) sont vraies et les assertions (iii) et (iv) sont fausses.}}$

Solution de l'exercice II

II.1 (a) L'assertion $P \uparrow Q$ si et seulement si (P ET Q) est fausse, c'est-à-dire :

$$\boxed{P \uparrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}\,(P \text{ ET } Q)\,.}$$

(b) D'après les lois de Morgan, on en déduit directement que

$$\boxed{P \uparrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}(P) \text{ OU } \mathit{non}(Q).}$$

II.2 D'après la question précédente, $P \uparrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}(P) \text{ OU } \mathit{non}(Q)$. Or le connecteur logique OU est symétrique : $\mathit{non}(P) \text{ OU } \mathit{non}(Q) \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}(Q) \text{ OU } \mathit{non}(P)$. Donc on en déduit que

$$\boxed{P \uparrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}(Q) \text{ OU } \mathit{non}(P) \quad \Leftrightarrow \quad Q \uparrow P.}$$

II.3 Toujours d'après la question II.1b, on a

$$\boxed{P \uparrow P \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}(P) \text{ OU } \mathit{non}(P) \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}(P).}$$

II.4 En utilisant la question II.1a on a

$$P \text{ ET } Q \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{non}\,(P \uparrow Q)\,.$$

Donc en utilisant la question II.3 avec $P \uparrow Q$, on obtient

$$\boxed{P \text{ ET } Q \quad \Leftrightarrow \quad (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)\,.}$$

II.5 D'après le cours :

$$P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad non(P) \text{ OU } Q.$$

et

$$non\,(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ ET } non(Q).$$

II.6 A l'aide de la question précédente et de la question II.1b,

$$P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad non(P) \text{ OU } Q \quad \Leftrightarrow \quad P \uparrow non(Q)$$

En remplaçant $non(Q)$ par $Q \uparrow Q$ (voir question II.3), on obtient

$$\boxed{P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad P \uparrow (Q \uparrow Q)\,.}$$

Solution de l'exercice III

III.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $P(n)$ la propriété $S_n = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$.

- *Initialisation.* Si $n = 1$, alors par définition $S_1 = 1$ et l'on remarque que $\frac{i-ni^n-(n+1)i^{n+1}}{2} = \frac{i-i-2i^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 = S_1$. Donc la propriété $P(1)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ est alors vraie c'est-à-dire que

$$S_{n+1} = \frac{i - (n+1)i^{n+1} - (n+2)i^{n+2}}{2}.$$

  On remarque que $S_{n+1} = S_n + (n+1)i^n$. Donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} S_{n+1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2} + (n+1)i^n &= \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1} + 2(n+1)i^n}{2} \\ &= \frac{i - (n+1)i^{n+1} + (n+2)i^n}{2}. \end{aligned}$$

  Afin de retrouver la formule souhaitée, il nous reste à remarquer que $1 = -i^2$, donc $(n+2)i^n = -i^2(n+2)i^n = -(n+2)i^{n+2}$. Finalement

$$S_{n+1} = \frac{i - (n+1)i^{n+1} - (n+2)i^{n+2}}{2}$$

  et donc $P(n+1)$ est alors vraie.
- *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}.}$$

III.2 Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $i^{2p} = (i^2)^p = (-1)^p$, on a

$$S_{2p+1} = 1 + 2i - 3 - 4i + 5 + \cdots + (2p+1)(-1)^p$$

et puisque $i^{2p-1} = \frac{i^{2p}}{i} = (-1)^p \frac{i}{-1} = (-1)^{p+1} i$, on a également

$$S_{2p} = 1 + 2i - 3 - 4i + 5 + \cdots + (2p)(-1)^{p+1} i$$

Donc on en déduit que

$$\operatorname{Re}(S_{2p+1}) = 1 - 3 + 5 + \cdots + (2p+1)(-1)^p = R_p$$

et

$$\operatorname{Im}(S_{2p}) = 2 - 4 + \cdots + 2p(-1)^{p+1} = I_p.$$

Donc d'après la question précédente, on a

$$R_p = \operatorname{Re}\left(\frac{i - (2p+1)i^{2p+1} - (2p+2)i^{2p+2}}{2}\right) = \frac{-(2p+2)(-1)^{p+1}}{2} = (p+1)(-1)^{p+2} = (p+1)(-1)^p.$$

Donc
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad R_p = (p+1)(-1)^p.}$$

De la même façon,
$$I_p = \mathrm{Im}\left(\frac{i - 2pi^{2p} - (2p+1)i^{2p+1}}{2}\right) = \frac{1-(2p+1)(-1)^p}{2}.$$

et donc
$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad P_p = \frac{1-(2p+1)(-1)^p}{2}.}$$

Solution du problème — Résolution d'équations trigonométriques

A.1 (a) $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}$ $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}}$ $\boxed{Z = z_1z_2 = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}}$

(b) $\boxed{Z = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right).}$

(c) Par unicité de l'écriture algébrique, on peut identifier les parties réelles et imaginaires, ce qui permet d'écrire l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & Z = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \\ \iff \quad & 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).}$$

(d) Calculons :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).}$$

A.2 (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & (1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = \sqrt{6} \\ \iff \quad & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos x - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{en multipliant par } \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \iff \quad & \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos x - \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \iff \quad & \cos\left(x + \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \iff \quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ x + \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x + \frac{7\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \iff \quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : en notant } \mathscr{S} \text{ l'ensemble des solutions, } \mathscr{S} = \left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right).}$$

(b) Notons $\mathscr{S}_{[0,2\pi[}$ l'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

On déduit de la question précédente que : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{5\pi}{12} + 2\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right\} = \left\{\frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}\right\}.}$

B.1 (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\cos(2x) - \sin(2x) &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(3x) - \cos(3x) &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3x)\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(3x) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(3x)\right)\\ &= \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right).}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}& \cos(2x) + \cos(3x) = \sin(2x) + \sin(3x)\\ \iff\ & \cos(2x) - \sin(2x) = \sin(3x) - \cos(3x)\\ \iff\ & \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)\\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) + 2k\pi\\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -x = -\pi + 2k\pi\\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - 2k\pi.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{S} = \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z}).}$

B.2 (a) En factorisant par l'angle moitié $\frac{p+q}{2}$, calculons :

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}.}$

(b) Sachant que $\cos p + \cos q = \mathrm{Re}(e^{ip} + e^{iq})$ et $\sin p + \sin q = \mathrm{Im}(e^{ip} + e^{iq})$, on trouve que :

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On déduit des questions précédentes que :

$$\cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(2x) + \sin(3x) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& cos(2x)+\cos(3x)=\sin(2x)+\sin(3x) \\
\Longleftrightarrow\ & 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right)-\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\right)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{5x}{2}\right)-\sin\left(\frac{5x}{2}\right)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{5x}{2}\right)=\sin\left(\frac{5x}{2}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{ou} \quad 1=\tan\left(\frac{5x}{2}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\pi+2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{S}=\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right)\cup(\pi+2\pi\mathbb{Z}).}$

C.1 (a) Après calculs, on trouve : $\boxed{\sin(3x)=-4\sin^3 x+3\sin x.}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin x &= -4\sin^3 x+3\sin x+1-(1-2\sin^2 x)-\sin x \\
&= -4\sin^3 x+2\sin^2 x+2\sin x \\
&= (2\sin x)(-2\sin^2 x+\sin x+1)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin x=(2\sin x)(-2\sin^2 x+\sin x+1).}$

C.2 Soit $X\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
2X(-2X^2+X+1)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2X=0 \quad \text{ou} \quad -2X^2+X+1=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad X=0 \quad \text{ou} \quad X=1 \quad \text{ou} \quad X=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Remarque : pour déterminer les solutions de l'équation du second degré $-2X^2+X+1=0$, il suffit d'en calculer son discriminant Δ, etc... $\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}.}$

C.3 Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& \sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin x=0 \\
\Longleftrightarrow\ & (2\sin x)(-2\sin^2 x+\sin x+1)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sin x=0 \quad \text{ou} \quad \sin x=1 \quad \text{ou} \quad \sin x=-\frac{1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & \sin x=0 \quad \text{ou} \quad \sin x=1 \quad \text{ou} \quad \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists k\in\mathbb{Z},\ x=k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\
& \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi
\end{aligned}
$$

Conclusion : l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{\mathscr{S}=(\pi\mathbb{Z})\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi\mathbb{Z}\right).}$$

On en déduit que l'ensemble $\mathscr{S}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ des solutions dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est : $\boxed{\mathscr{S}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}=\left\{0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right\}.}$