Épreuve de Mathématiques 2
2018-2019

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h30

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Question de cours

Les questions suivantes sont totalement indépendantes les unes des autres.

1. Réciter la formule du binôme de Newton et l'égalité de Bernoulli (c'est-à-dire « celle permettant de factoriser $a^n - b^n$ ») avec TOUTES leurs hypothèses.
2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-3}{k(k+1)} \qquad B_p = \sum_{t=1}^{p} \binom{p+1}{t} \qquad C_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+2}{i} (-2^{-i})^4$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme double suivante :

$$D_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$$

On donnera le résultat sous forme factorisée.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Recopier et compléter les équivalences suivantes :

$$z^6 = 1 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z^3 = -1 - i \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Problème 1 — Autour des noyaux de Dirichlet et de Féjer

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes trigonométriques suivantes :

$$D_n(x) = \begin{cases} 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{pour } n \geqslant 1,\ F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

Culture générale : D_n désigne le $n^{\text{ième}}$ noyau de Dirichlet et F_n le noyau de Féjer d'ordre n.

Pour étudier ces sommes $D_n(x)$ et $F_n(x)$, on introduit la somme intermédiaire suivante :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$$

Les différentes parties de ce problème sont en grande partie indépendante.

Partie I - Étude du $n^{\text{ième}}$ noyau de Dirichlet

1. Calculer $D_n(x)$ pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose ici que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \geqslant 1$.
   (a) Factoriser (par angle moitié) $1 - \mathrm{e}^{i\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire :

$$E_n(x) = \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} \times \mathrm{e}^{i\frac{nx}{2}} \qquad (\bigstar)$$

(c) Justifier avec soin :

$$D_n(x) = \mathscr{R}\mathrm{e}(2E_n(x) - 1) \qquad (\bigstar\bigstar)$$

(d) En déduire :

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} \qquad (\bigstar\bigstar\bigstar)$$

(e) La formule précédemment établie est-elle valable pour $n = 0$?

3. Déterminer une forme trigonométrique de $E_n\left(\dfrac{3\pi}{n+1}\right)$.
Indication : on pourra utiliser $(\bigstar)$ *et discuter en fonction de la valeur de* n.

Partie II - Étude du noyau de Féjer d'ordre n

On admet ici le résultat $(\bigstar\bigstar\bigstar)$ établi en partie I, à savoir :

$$\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

4. À l'aide de la question 1, calculer $F_n(x)$ pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \geqslant 1$.
5. On suppose ici que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$D_k(x) = \frac{\cos(kx) - \cos((k+1)x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

   (b) En déduire :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

Partie III - Calcul de $\tan(\pi/8)$

6. Montrer à l'aide de $(\bigstar)$:

$$\mathscr{R}\mathrm{e}\left(E_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\right)$$

7. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 1 — Racines $n^{\textit{ièmes}}$ de l'unité

On pose $a = e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $b = -a$.

1. Montrer que $a \in \mathbb{U}_{10}$, puis qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $m < 10$ tel que $b \in \mathbb{U}_m$.
2. Justifier :
$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 = 0$$
3. (a) Comparer $\overline{a}$ et $\frac{1}{a}$.
   (b) En déduire que $\overline{a} = -a^4$.
   (c) Montrer :
$$1 - (a + \overline{a}) + (a^2 + \overline{a}^2) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$$
4. En déduire la valeur de $1 - 2\cos(\frac{\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5})$.
5. On pose $X = \cos(\frac{\pi}{5})$. Exprimer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ en fonction de X.
6. Déduire des questions précédentes que X est une solution d'une équation que l'on précisera.
7. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

Problème 2 — Autour d'une fonction complexe

On considère la fonction f définie sur $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathscr{D}_f,\ f(z) = \frac{z-2}{2z-1}$$

Les différentes parties de ce problème sont totalement indépendantes.

Partie I - Logique et raisonnements

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f. *Justifier votre réponse.*
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}_f$,
$$z \text{ est de module } 1 \Longrightarrow \frac{f(z)-2}{z-2} \text{ est réel}$$
3. Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}_f$,
$$|z| = 1 \Longleftrightarrow |f(z)| = 1$$
4. (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}_f$:
$$f(f(z)) = z$$
   (b) Soit $z \in \mathscr{D}_f$. En déduire :
$$\forall n \geqslant 1,\ \Big[\ \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n \textit{ fois}}(z) = z \quad \text{ET} \quad \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{2n+1 \textit{ fois}}(z) = f(z)\Big]$$

5. On considère la proposition P quantifiée suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},\ \exists! \omega \in \mathscr{D}_f,\ f(\omega) = z$$

   (a) Proposer une traduction simple en français de la proposition P.

   (b) Montrer que P est une proposition vraie.

Partie II - Résolution d'équations

Le but de cette partie est de résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue z complexe :

$$f\left(\frac{1}{z^5}\right) = \frac{1}{z^{10}} + \frac{4i}{z^5} + \frac{-6+2i-(5+3i)z^5}{2-z^5} \tag{E}$$

6. On considère l'équation (E_1) suivante d'inconnue z complexe :

$$2z^3 + (-1+8i)\,z^2 + (-7-2i)\,z - 3 - 3i = 0. \tag{E_1}$$

   (a) Justifier que $-1/2$ est solution de (E_1).

   (b) Déterminer des complexes a, b et c tels que :

$$2z^3 + (-1+8i)\,z^2 + (-7-2i)\,z - 3 - 3i = (2z+1)(az^2+bz+c)$$

   (c) En déduire la résolution de l'équation (E_1).

On pourra admettre dans la suite que l'ensemble $\mathscr{S}_1$ des solutions de (E_1) est donné par

$$\mathscr{S}_1 = \left\{-\frac{1}{2}\,;\, 1-i\,;\, -3i\right\}$$

7. En déduire la résolution de l'équation (E_2) suivante d'inconnue z complexe :

$$f(z) = z^2 + 4iz + \frac{(-6+2i)\,z - 5 - 3i}{2z-1}. \tag{E_2}$$

8. En déduire la résolution de l'équation (E).

FIN DE L'ÉPREUVE