Les erreurs du DS3

Dans les énoncés ci-dessous, trouver l'erreur, la corriger, donner si possible un contre-exemple et ne plus jamais faire une telle erreur. L'erreur peut-être une rédaction insuffisante.

Attention, les scènes suivantes peuvent (et doivent en réalité) heurté votre sensibilité mathématique.

• **Erreur 1.**
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $2^x = 5y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln(2)} = \mathrm{e}^{\ln(5y)}$.

....

....

....

• **Erreur 2.**
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\frac{\ln(x)\ln(x)}{\ln(3)\ln(9)} = 2 \Leftrightarrow \ln^2(x) = 2\ln(12)$.

....

....

....

• **Erreur 3.**
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\ln^2(x) = 2\ln(3)\ln(9) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\sqrt{2\ln(3)\ln(9)}}$.

....

....

....

• **Erreur 4.**
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\frac{\ln(x)\ln(x)}{\ln(3)\ln(9)} = 2 \Leftrightarrow \frac{2\ln(x)}{4\ln(3)} = 2$.

....

....

....

• **Erreur 5.**
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $(z+1)^n = -(z-1)^n \Leftrightarrow z+1 = (-1)^{1/n}(z-1)$.

....

....

....

• **Erreur 6.**
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $(z+1)^n + (z-1)^n = 0 \Leftrightarrow (z+1+z-1)^n = 0$.

....

....

....

• **Erreur 7.**
Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• **Erreur 8.**
Les fonctions $x \mapsto \sqrt{4+x^2}$ et $x \mapsto x$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto x + \sqrt{4+x^2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

• **Erreur 9.**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant x$.

• **Erreur 10.**
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt{x^2+4} = 2\,\mathrm{e}^y - x \iff x^2 + 4 = (2\,\mathrm{e}^y - x)^2$.

• **Erreur 11.**
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On sait d'après une question précédente que $x + \sqrt{4+x^2} \geqslant 0$ et $2\,\mathrm{e}^y > 0$. Donc on a l'équivalence suivante : $x + \sqrt{x^2+4} = 2\,\mathrm{e}^y \iff x^2 + x^2 + 4 = 4\,\mathrm{e}^{2y}$.

• **Erreur 12.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g_n(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{n} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $g_n(x) > 0$.

• **Erreur 13.**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1$. On a

$$g_n(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x^2}{n} \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant 0.$$

Par conséquent, g_n est positive.

. . . .

. . . .

• **Erreur 14.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} \frac{2x}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - 1 > 0 \qquad \text{car } x \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{n} > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x > 0 \qquad \text{car } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

. . . .

. . . .

. . . .

• **Erreur 15.**
Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ et h définie par $h(x) = \frac{\ln(f(x))}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$. On admet que h est bien définie sur $\mathscr{D}_h =]0;+\infty[$. On a alors

$$\forall x \in \mathscr{D}_h, \quad h(-x) = \frac{\ln(f(-x))}{-x} = -\frac{\ln(f(x))}{x} \qquad \text{car } f \text{ est paire.}$$

Donc $\forall x \in \mathscr{D}_h$, $h(-x) = -h(x)$ et h est impaire.

. . . .

. . . .

. . . .

• **Erreur 16.**
On observe que $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{x}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{4x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = \mathrm{e}^0 = 1$ (formule du cours ou reconnaitre le taux d'accroissement de la fonction exponentielle).

. . . .

. . . .

. . . .

• **Erreur 17.**
La fonction $f : x \mapsto x^x$ est une fonction puissance donc d'après le cours, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = x^{x-1}.$$

. . . .

. . . .

. . . .

• **Erreur 18.**
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \tan(3x) = \lim\limits_{x\to 0} x$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.

. . . .

. . . .

. . . .